応用数学 II　　自習確認･課題 No.201 正解　　令和　年度

[出題項目 基礎概念]

問１．リーマン積分の定義を図を用いて説明する。

正解

1. 上限和，下限和

f を閉区間 $[a,b]$ で定義された上に有界な関数とする。区間 $[a,b]$ の分割 $\Delta=\{c_i\}$ に対し，
$m_i(f;\Delta)=inf\{f(x)\mid c_{i-1}\leqq x\leqq c_i\}$,
$M_i(f;\Delta)=sup\{f(x)\mid c_{i-1}\leqq x\leqq c_i\}$ とおく。
さらに，$\sigma(f;\Delta)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}m_i(f;\Delta)(c_i-c_{i-1})$ を (リーマンの) Δ の **下限和**,
$\Sigma(f;\Delta)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}M_i(f;\Delta)(c_i-c_{i-1})$ を (リーマンの) Δ の **上限和** という。

一般的に，各分割 $\Delta=\{c_i\}$ に対し，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}f(x_i)(c_i-c_{i-1})$ は Δ に対する**リーマン和** と言われる。 ただし，x_i は $c_{i-1}\leqq x_i\leqq c_i$ を満たす実数で，それらを集めた集合 $\{x_i\mid i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ は**代表値系** と言われる。

2. 補題７８．f を閉区間 $[a,b]$ で定義された上に有界な関数とする。
$\Delta=\{c_i\}$ と $\Delta'=\{c_i'\}$ をともに区間 $[a,b]$ の分割で，$\Delta'\prec\Delta$ であると仮定する。このとき，$\sigma(f;\Delta)\leqq\sigma(f;\Delta')\leqq\Sigma(f;\Delta')\leqq\Sigma(f;\Delta)$ となる。
これより，任意の 区間 $[a,b]$ の分割 Δ_1，Δ_2 に対し，
$\sigma(f;\Delta_1)\leqq\sigma(f;\Delta_1\cup\Delta_2)\leqq\Sigma(f;\Delta_1\cup\Delta_2)\leqq\Sigma(f;\Delta_2)$ となる。

3. 系 f を閉区間 $[a,b]$ で定義された上に有界な関数とする。
$\Lambda=\{\Delta\mid\Delta$ は $[a,b]$ の分割 $\}$，つまり，Λ を $[a,b]$ のすべて分割からなる集合とする。このとき，$U(f)=\{\sigma(f;\Delta)\mid\Delta\in\Lambda\}$ は上に有界で，$L(f)=\{\Sigma(f;\Delta)\mid\Delta\in\Lambda\}$ は下に有界である。

この系より，$supU(f)$ と $infL(f)$ が存在する。それぞれを，$\sigma(f)$，$\Sigma(f)$ で表わす。つまり，
$\sigma(f)=supU(f)$，$\Sigma(f)=infL(f)$ とおく。

4. [リーマン積分可能]

f を閉区間 $[a,b]$ で定義された上に有界な関数とする。
$\sigma(f)=\Sigma(f)$ が成り立てば，f **は** $[a,b]$ **でリーマン積分可能である** と言われる。この $\sigma(f)=\Sigma(f)$ の値を $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ で表し，a **から** b **までの** f **の (リーマンの) 定積分である** と言われる。

また，$\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx$ を $-\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ と定義する。

問２．リーマン積分では，求めたい領域の面積を細く縦 (y 軸に平行) に領域を分けて，その分けた部分の面積は長方形の面積とほぼ等しいと考え，求めています。これを横 (x 軸に平行) に領域を分けて求めたいと思います。どのような事柄が問題として出てきますか。よく考えて，自分が感じる・考える問題を説明・列挙しなさい。

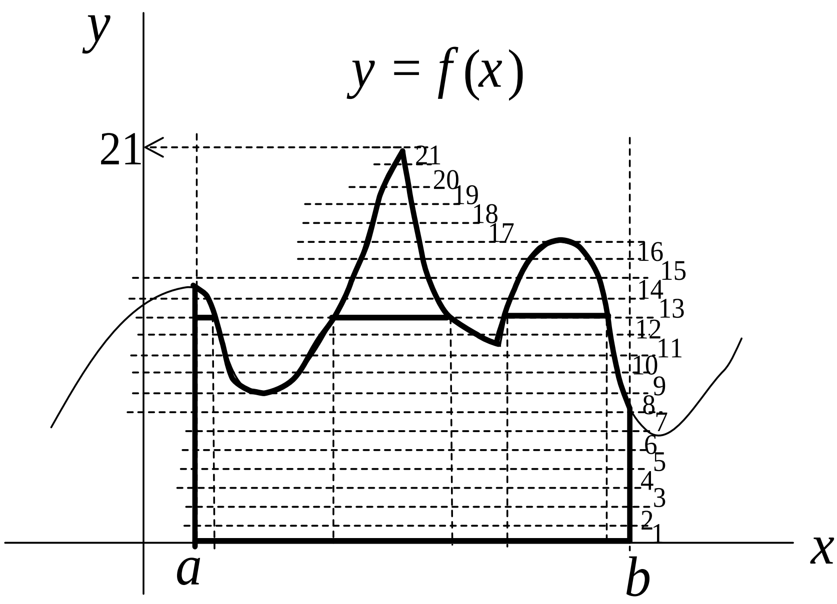
正解例

下図のように面積を求める領域を 21 等分して,21 個の右側に番号が振られた左右に伸びた長方形的な帯に分けて，これらの面積を和を計算し，分ける (等分する) 帯の数を無限大に近づけていったときの極限値として，その領域の面積と定めればよいと考えられる。

図で説明すると，1 番から 7 番までの帯の面積は，底辺 $b-a$ 掛ける高さ $21 \div 21 = 1$ より，$b-a$ となる。

しかし，それらより上側の帯の面積の求め方は少し複雑になる。例として，13 番の帯を考える。図の水平の太線が底辺の一部で，それら線分の長さの和を底辺，高さを 1 として面積が計算される。

問題は，いくつかの線分の和で済めば良いが，複雑は関数のグラフで，それらがいくつかの点と線分の和である場合や，無限個の点や線分の和を計算する必要が出てくることが予想される。はたしてそのような計算ができるのかが問題ということである。もっと一般的に考えて，実数の部分集合，今の例では区間 $[a,b]$ の部分集合に‘長さ’を決めれるのかということである。



$$(\text{面積}) = (\text{新しい意味での}) \int_{a \,\leqq\, x \,\leqq\, b} f(x)\, dx$$