『解析学 1,2』
(Lebesgue 積分論) 資料

上村 稔大

Contents

Chapter 1

イントロダクション

1.1 Riemann 可積分函数

問題: 関数 f が Riemann 積分可能であるとは？

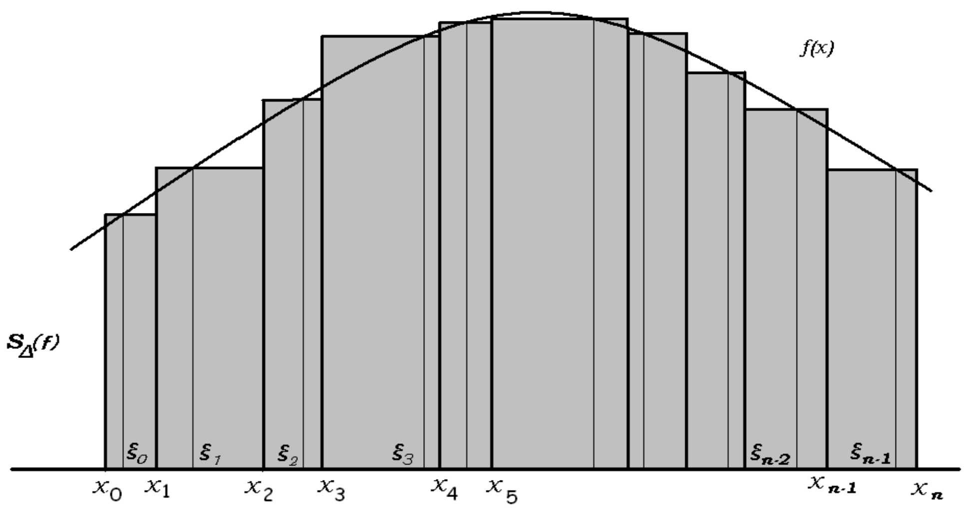
区間 $[a,b]$ $(a<b)$ を定義域とする有界な関数 f [1]が与えられているとする．今，区間 $[a,b]$ を次のような分点で分割する： $\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n = b.$

以下，この分点の集合 $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ を Δ で表し，これによる分割を $[a,b]$ の**分割** Δ (partition) とよぶ．この分割における小区間 $[x_i, x_{i+1}]$ の長さ $x_{i+1} - x_i$ $(i = 0,1,2,\ldots,n-1)$ の中で，もっとも長さの大きいものを $|\Delta|$ と書き，これを分割 Δ の "mesh" という：

$$|\Delta| = \max_{0\le i\le n-1}(x_{i+1} - x_i).$$

そうして，各 $i = 0,1,2,\ldots,n-1$ に対して，小区間 $[x_i, x_{i+1}]$ 上に任意に点 $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ を取る． このとき，次のような（近似）和を考える：

$$S_\Delta(f) := S_{\Delta,\xi}(f) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \tag{1.1}$$



[1] $[a,b]$ 上で定義されている関数 f が**有界** (bounded) であるとは，適当な $M>0$ があって，任意の $x \in [a,b]$ に対して常に $|f(x)| \le M$ となるときをいう．

定義 1.1. 分割 Δ 及び分割の各小区間 $[x_i, x_{i+1}]$ 内の点 $\xi_i\,(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ をどのようにとっても，分割の mesh $|\Delta|$ が 0 に近づいて，さらに $S_\Delta(f)$ がある一定値 A に近づく，というとき，一定値 A を $f(x)$ の区間 $[a, b]$ での Riemann **積分**といい，

$$\int_a^b f(x)dx = A$$

であると定める．

Riemann は,「どのような関数が積分可能か？」ということを問題にした．

区間 $[a, b]$ の分割 Δ を一つ固定すると，$S_\Delta(f) = S_{\Delta,\Xi}(f)$ の値は $\Xi = \{\xi_i\}$ の取り方によって決まってくるが，分割の仕方や $\{\xi_i\}$ の取り方に依らずに分割の mesh を 0 に近づけたときに，一定値に近づくとき，ともかくその一定値を $f(x)$ の積分と呼んでしまおうというのが，Riemann の考え方である．

以下，関数 f が Riemann 積分可能であるための必要十分条件を述べよう．そのために，区間 $[a, b]$ の分割 Δ を再び考える： $\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.
このとき，各小区間 $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ 上での $f(x)$ の上限, 下限をそれぞれ M_i, m_i とおく：

$$M_i = \sup_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x), \qquad m_i = \inf_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x).$$

また，その差を

$$\omega(f : [x_i, x_{i+1}]) := M_i - m_i$$

とおき，これを $[x_i, x_{i+1}]$ における $f(x)$ の**振動量**と呼ぶ．このとき，$S_{\Delta,\Xi}$ において，$\Xi = \{\xi_i\}$ の取り方をいろいろと変えたときの最大のものと最小のものとの差は

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega(f : [x_k, x_{k+1}])(x_{k+1} - x_k) \tag{1.2}$$

である．Riemann は，$f(x)$ が上の意味で $[a, b]$ 上において積分可能，すなわち，$f(x)$ が $[a, b]$ 上で Riemann 積分可能であるための必要十分条件として次の結果を述べている：

$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ の分割 $\boldsymbol{\Delta}$ の小区間 $[\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{x_{i+1}}]$ における $\boldsymbol{f(x)}$ の振動量を $\boldsymbol{\omega(f : [x_i, x_{i+1}])}$ とするとき，分割の mesh を十分細かくすれば (1.2) はいか程にも小さく出来る．

Riemann によるこの結果を証明するために，Darboux の定理を述べることにする．そのために，次の二つの（近似）和を考える：

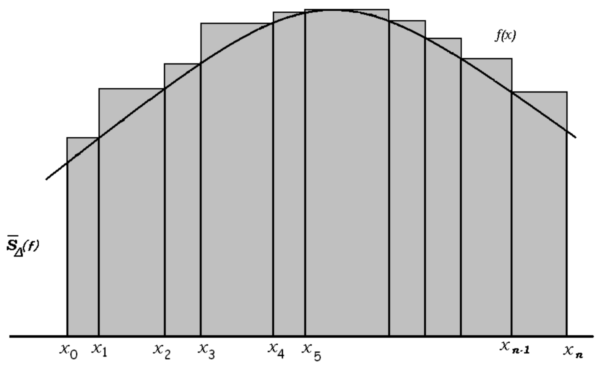
$$\overline{S}_\Delta(f) := \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i), \qquad \underline{S}_\Delta(f) := \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i).$$

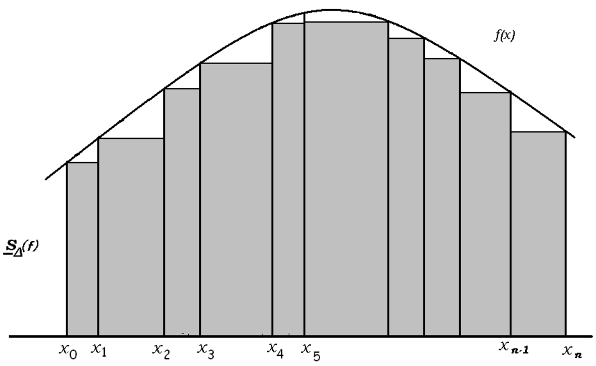
任意の $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ に対して，$-M \le m_i \le f(\xi_i) \le M_i \le M$ に注意すると，

$$-M(b-a) \le \underline{S}_\Delta(f) \;\le\; S_{\Delta,\Xi}(f) \;\le\; \overline{S}_\Delta(f) \;\le M(b-a)$$

となる．そうして，それぞれ分割 Δ を色々と取ったときの $\overline{S}_\Delta(f)$ の下限を $\overline{\int_a^b} f(x)dx$ とおき，$\underline{S}_\Delta(f)$ の上限を $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ と定め，それぞれ Darboux の**上積分・下積分**と呼ぶ:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf_\Delta \overline{S}_\Delta(f), \qquad \underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup_\Delta \underline{S}_\Delta(f).$$





特に，両者が一致するとき，その共通の値を

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx}$$

と書いて $f(x)$ の $[a,b]$ における Riemann **積分**といい，$f(x)$ は $[a,b]$ において Riemann **積分可能**（Riemann **可積分**）であるということにする．これが先に述べた，Riemann 積分の定義の解釈である．

いま，$[a,b]$ の二つの分割 Δ_1, Δ_2 について，$\Delta_1 \subset \Delta_2$ になっているとき，Δ_2 は Δ_1 の**細分**であるといい，$\Delta_3 = \Delta_1 \cup \Delta_2$ のとき，分割 Δ_3 は Δ_1 と Δ_2 の**和**であるということにする．

補題 1.1. $\Delta_1 \subset \Delta_2$ ならば，

$$\overline{S}_{\Delta_1}(f) \geq \overline{S}_{\Delta_2}(f), \qquad \underline{S}_{\Delta_1}(f) \leq \underline{S}_{\Delta_2}(f).$$

Proof: 分割 Δ_1 に分点を一点だけ付け加えて得られる分割を Δ' とするとき，

$$\overline{S}_{\Delta_1}(f) \geq \overline{S}_{\Delta'}(f), \quad \underline{S}_{\Delta_1}(f) \leq \underline{S}_{\Delta'}(f)$$

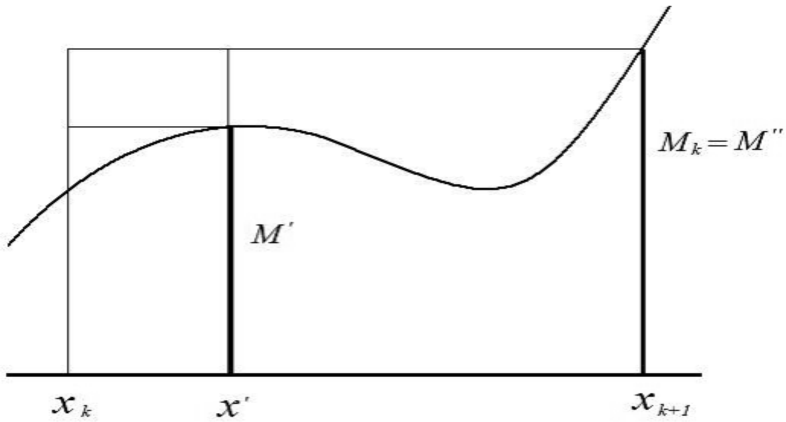
を示せば十分である．そこで，Δ_1 の小区間 $[x_i, x_{i+1}]$ の中に点 x' をとり $[x_i, x']$, $[x', x_{i+1}]$ を考える．このとき，

$$M_k = \sup_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} f(x), \quad M' = \sup_{x_k \leq x \leq x'} f(x), \quad M'' = \sup_{x' \leq x \leq x_{k+1}} f(x)$$

とおけば，$M_k \geq M'$, $M_k \geq M''$ であるから，

$$\overline{S}_{\Delta_1}(f) \ = \ \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{k-1} M_i(x_{i+1}-x_i) + M_k(x_{k+1}-x_k) + \sum_{i=k+1}^{n-1} M_i(x_{i+1}-x_i) \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} M_i(x_{i+1}-x_i) + M_k(x'-x_k) + M_k(x_{k+1}-x') + \sum_{i=k+1}^{n-1} M_i(x_{i+1}-x_i) \\
&\leq \sum_{i=0}^{k-1} M_i(x_{i+1}-x_i) + M'(x'-x_k) + M''(x_{k+1}-x') + \sum_{i=k+1}^{n-1} M_i(x_{i+1}-x_i) \\
&= \overline{S}_{\Delta'}(f)
\end{aligned}
$$



となる．$\underline{S}_{\Delta_1}(f)$ についても証明は同様である． □

補題 1.2. 任意の分割 Δ_1, Δ_2 について

$$\underline{S}_{\Delta_1}(f) \leq \overline{S}_{\Delta_2}(f)$$

が成立する．

Proof: 任意の分割 Δ に対して $\underline{S}_{\Delta}(f) \leq \overline{S}_{\Delta}(f)$ であることは，定義により明らかである．したがって，$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ とすれば，$\Delta_1 \subset \Delta$, $\Delta_2 \subset \Delta$ であるから，先の補題により

$$\underline{S}_{\Delta_1}(f) \leq \underline{S}_{\Delta}(f) \leq \overline{S}_{\Delta}(f) \leq \overline{S}_{\Delta_2}(f)$$

となり，補題が示された． □

まず，これらの補題から，次の命題が成立することがわかる：

命題 1.1.

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

である．

Proof: 前の補題は任意の分割 Δ_1, Δ_2 に対して成立していることに注意すると，まず Δ_1 を固定して，すべての Δ_2 に関する $\overline{S}_{\Delta_2}(f)$ の下限をとれば，

$$\underline{S}_{\Delta_1}(f) \leq \inf_{\Delta_2} \overline{S}_{\Delta_2}(f) = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

となる．次に，上の不等式において，すべての Δ_1 に関する上限をとれば，

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_{\Delta_1} \underline{S}_{\Delta_1}(f) \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

となる． □

補題 1.3. 分割 Δ に対して，それに分点を一点付け加えて得られる分割を Δ' とすれば， $M = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ として

$$\overline{S}_{\Delta'}(f) \leq \overline{S}_{\Delta}(f) \leq \overline{S}_{\Delta'}(f) + 2M|\Delta|, \qquad \underline{S}_{\Delta}(f) \leq \underline{S}_{\Delta'}(f) \leq \underline{S}_{\Delta}(f) + 2M|\Delta|$$

となる．但し，$|\Delta|$ は分割 Δ の mesh を表す．

Proof: 補題 1.1 の証明と同じように，Δ の分点 x_k と x_{k+1} の間に x' を付け加えたとすれば，M_k, M', M'' はそのときと同じものを表すとして，

$$\begin{aligned} 0 &\leq \overline{S}_{\Delta}(f) - \overline{S}_{\Delta'}(f) \\ &= M_k(x_{k+1} - x_k) - M'(x' - x_k) - M''(x_{k+1} - x') \\ &\leq M(x_{k+1} - x_k) + M(x' - x_k) + M(x_{k+1} - x') = 2M(x_{k+1} - x_k) \\ &\leq 2M|\Delta| \end{aligned}$$

となる．$\underline{S}_{\Delta}$ についても同様である． □

以上の準備の下，Darboux による Riemann 積分に関する定理を述べておこう．

定理 1.1. （Darboux の定理） $f(x)$ は $[a, b]$ 上定義された有界な函数とする．

(1) $[a, b]$ の分割 Δ で，その mesh を $|\Delta|$ とおくと，

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \overline{S}_{\Delta}(f) = \overline{\int_a^b} f(x)dx, \qquad \lim_{|\Delta| \to 0} \underline{S}_{\Delta}(f) = \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

(2) f が Riemann 積分可能であるための必要十分条件は，

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

であることであり，そのとき， f の Riemann 積分の値は，この共通の値に等しい．

Proof: $\overline{\int_a^b} f(x)dx$ の定義により，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，次のような $[a, b]$ の分割 Δ_1 が存在する：

$$\overline{S}_{\Delta_1}(f) - \varepsilon/2 \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{S}_{\Delta_1}(f).$$

いま，Δ_1 の分点の数を ℓ とすれば，任意の分割 Δ に対して，$\Delta_1 \subset \Delta \cup \Delta_1$．従って，補題 1.2 より，$\overline{S}_{\Delta\cup\Delta_1} \leq \overline{S}_{\Delta_1}$ であるから，上の不等式より

$$\overline{S}_{\Delta\cup\Delta_1}(f) - \varepsilon/2 \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \tag{1.3}$$

が得られる．

次に，分割 $\Delta \cup \Delta_1$ は，分割 Δ に高々 ℓ 個の分点を付け加えて得られる分割であるから，補題 1.3 を ℓ 回繰り返し用いることにより，

$$\overline{S}_{\Delta}(f) \leq \overline{S}_{\Delta\cup\Delta_1}(f) + 2M\ell|\Delta|$$

となる．従って，上の $\varepsilon > 0$ に対して，$2M\ell\delta < \varepsilon/2$ となるように $\delta > 0$ をとり，$|\Delta| < \delta$ となるような任意の分割 Δ に対しては，

$$\overline{S}_{\Delta}(f) \leq \overline{S}_{\Delta\cup\Delta_1}(f) + \varepsilon/2$$

となる．よって，(1.3) とあわせて

$$\overline{S}_{\Delta}(f) - \varepsilon < \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

であることがわかる．$\underline{S}_{\Delta}(f)$ についても同様に証明できる．

次に，

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

が成立するとする．このとき，上積分と下積分の定義より，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，分割 Δ_1 及び Δ_2 が存在して，

$$\overline{S}_{\Delta_1}(f) - \varepsilon/2 \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{S}_{\Delta_1}(f),$$

$$\underline{S}_{\Delta_2}(f) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \underline{S}_{\Delta_2}(f) + \varepsilon/2.$$

となる．今，$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ とおけば，$\overline{S}_{\Delta} \leq \overline{S}_{\Delta_1}$, $\underline{S}_{\Delta} \geq \underline{S}_{\Delta_2}$ であるから上の二つの不等式において，Δ_1 及び Δ_2 を Δ に置き換えた不等式が成り立つ．よって，Δ を

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

とすると，

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} \omega(f : [x_\ell, x_{\ell+1}])(x_{\ell+1} - x_\ell) = \overline{S}_{\Delta}(f) - \underline{S}_{\Delta}(f) < \varepsilon$$

となり，f が Riemann 可積分であることがわかる．

最後に，f が Riemann 可積分であるとする．このとき，任意の分割 Δ について

$$\overline{S}_{\Delta}(f) \geq \overline{\int_a^b} f(x)dx, \qquad \underline{S}_{\Delta}(f) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

であるから，

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{S}_\Delta(f) - \underline{S}_\Delta(f)$$

が成り立つ．いま，f は可積分と仮定しているので，Δ に対する (1.2) である上の右辺は mesh $|\Delta|$ を小さくすれば，いかほどにも小さくできるので，f の上積分と下積分は一致しなくてはいけない．すなわち，

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

が成り立つ． □

例題 1.1. 区間 $[a,b]$ 上で定義された有界な単調関数は, Riemann 積分可能である．

実際，f が単調増加関数ならば，$[a,b]$ の分割:

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

に対して，任意の小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ について

$$\omega(f : [x_{k-1}, x_k]) = f(x_k) - f(x_{k-1})$$

となるので，

$$\sum_{k=1}^{n} \omega(f : [x_{k-1}, x_k]) = \sum_{k=1}^{n} \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big) = f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a).$$

一方，特に区間 $[a,b]$ の分割で，等分割を考えたとき，すなわち，$[a,b]$ を n 等分したとき，各小区間の長さは $(b-a)/n$ であるが，これら小区間の中で，その区間における f の振動量が ε より大となる個数を k とすると，

$$k\varepsilon \leq \sum_{k=1}^{n} \omega(f : [x_{k-1}, x_k]) = f(b) - f(a)$$

より

$$k \leq \frac{f(b) - f(a)}{\varepsilon}$$

となる．このとき，振動量が ε よりも大きくなる小区間の長さの総和は,

$$k \cdot \frac{b-a}{n} \leq \frac{\big(f(b) - f(a)\big)(b-a)}{n\varepsilon}$$

となる．この右辺は，n を十分大きく取ることにより，任意に与えた $\delta > 0$ よりも小さくすることができる． よって，単調増加関数 f は区間 $[a,b]$ において Riemann 積分可能である． □

例題 1.2. $f(x)$ を $[a,b]$ において，

$$\begin{array}{ll} x \text{ が有理数ならば} & f(x)=1 \\ x \text{ が無理数ならば} & f(x)=0 \end{array}$$

とおく．このとき $f(x)$ は，任意の分割に対して $M_k=1, m_k=0$ であるから，

$$\begin{aligned} \overline{S}_\Delta(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} 1\cdot(x_{k+1}-x_k) = b-a \\ \underline{S}_\Delta(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} 0\cdot(x_{k+1}-x_k) = 0. \end{aligned}$$

従って，

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = b-a, \qquad \underline{\int_a^b} f(x)dx = 0$$

となり，$f(x)$ は $[a,b]$ において Riemann 積分可能ではない． □

この例題で定義される関数を Dirichlet[2]の関数という．

問題 1.1. 関数 f を有界閉区間 $[a,b]$ 上で定義された連続関数とする．このとき，f は Riemann 積分可能であることを示せ．

Hint: 有界閉区間上で定義された連続関数は一様連続である，という事実を用いる．f を $[a,b]$ 上の連続関数とする．任意の $\varepsilon>0$ に対して，適当に $\delta>0$ を取ると，$|x-x'|<\delta$ を満たす任意の $x,x'\in[a,b]$ に対して，常に $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$ が成り立つ．そこで，$[a,b]$ 上の分割 Δ:

$$\Delta : a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

を，$|\Delta|<\delta$ となるようにとると，

$$\sum_{k=1}^{n} \omega(f:[x_k,x_{k-1}]) \le \varepsilon(b-a)$$

となる．

問題 1.2. 区間 $[0,1]$ 上で

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{p} & \left(x \text{ が有理数で，既約分数として } \dfrac{q}{p} \text{ と表されるとき}\right) \\ 0 & \left(x \text{ が無理数}\right) \end{cases}$$

とすれば，$f(x)$ は区間 $[0,1]$ 上 Riemann 積分可能で

$$\int_0^1 f(x)dx = 0$$

となることを示せ．

[2]L. Dirichlet(1805-0859) はドイツの数学者である．代数学や解析学において多くの足跡を残した．Dirichlet の名の付いた定理・概念として，Dirichlet の算術級数の定理 (整数論)，Dirichlet のディオファントス近似定理 (整数論)，Dirichlet 指数 (整数論)，Dirichlet の原理 (解析学)，Dirichlet 問題 (偏微分方程式) など

問題 1.3. $f(x)$ を区間 $[a,b]$ 上で有界な関数とする．このとき，$[a,b]$ を n 等分してその細分を $\Delta(n)$ とし，Darboux の和 $\overline{S}_{\Delta(n)}(f)$, $\underline{S}_{\Delta(n)}(f)$ を作れば

$$\lim_{n\to\infty}\overline{S}_{\Delta(n)}(f)=\overline{\int_a^b} f(x)dx, \qquad \lim_{n\to\infty}\underline{S}_{\Delta(n)}(f)=\underline{\int_a^b} f(x)dx$$

であることを示せ（勿論，Darboux の定理によるのではなく，直接示すこと）．

これにより，よくなされるように， Riemann 積分の考察に当たっては，区間を等分した場合で考えれば良いことが知られる．

1.2 Lebesgue の和，Lebesgue 積分

前世紀の初めに H. Lebesgue は次のような新しい着想に基づく積分の取り扱いを創めた．

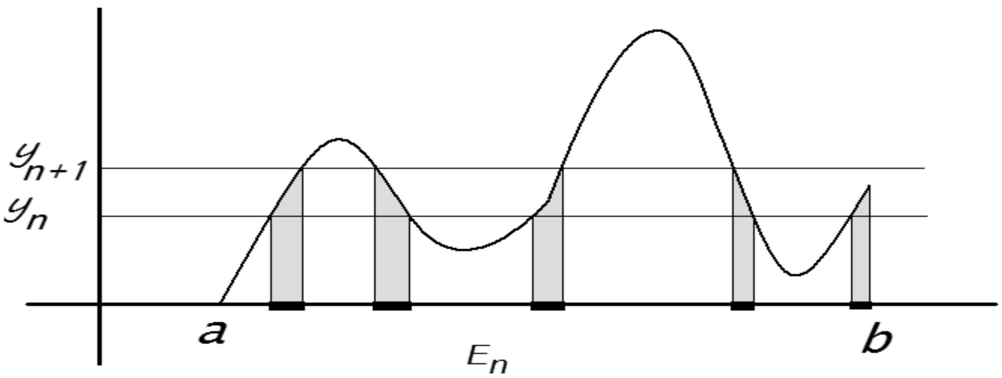
有限区間 $[a,b]$ で定義された，負の値を取らない実数値の必ずしも有界とは限らない関数 $y=f(x)$ について，次のように関数 $f(x)$ に即した $[a,b]$ の分割を考える： 正の y 軸を

$$0=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_n<\cdots \quad \text{かつ} \quad \lim_{n\to\infty} y_n=\infty$$

となるような分点 $\{y_j\}$ によって分割し，この y 軸の分割 Δ によって $[a,b]$ を互いに共通点を持たない可算個の集合

$$E_n:=\{x\in[a,b]:\ y_n\le f(x)<y_{n+1}\}$$

の和 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ に分割する．但し，$E_n\cap E_m=\varnothing,\ n\neq m$ である． この E_n は，簡単な $f(x)$ によって与えられる次の図のような場合でも，a,b の上の太線で示されているように切れ切れの区間の和になっている．



これら切れ切れの区間の長さの総和を E_n の**測度** (measure) と名づけて，$m(E_n)$ と書くことにすると，$y=f(x)$ のグラフと三つの直線 $x=a, x=b, y=0$ とで囲まれた図形の ‘面積’ の，下及び上からの近似値として

$$\underline{S}^{\Delta}(f)=\sum_{n=0}^{\infty} y_n\cdot m(E_n), \qquad \overline{S}^{\Delta}(f)=\sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1}\cdot m(E_n) \tag{1.4}$$

が考えられる．これらを，関数 $f(x)$ の (Riemann 積分を定義する際に出てきた，Darboux の上積分・下積分を定義するときの和に対比して) Lebesgue **の和**と呼ぶことも出来る．

Riemann の和のときの Darboux の定理にあたるものとして，次の定理が得られる．

定理 1.2. y 軸の分割 Δ に対して得られる $[a,b]$ の分割

$$[a,b]=\bigcup_{n=0}^{\infty}E_n$$

の各 E_n の測度 $m(E_n)$ に対して，常に

仮定 1:

$$b-a=m([a,b])=m\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty}E_n\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}m(E_n) \tag{1.5}$$

が成り立つ．そしてさらに

仮定 2: y 軸の分割 Δ を色々と変えて得られる値 $\underline{S}^{\Delta}$ の集合が有界である．

このとき，

$$0\le\sup_{\Delta}\underline{S}^{\Delta}(f)=\lim_{|\Delta|\to 0}\underline{S}^{\Delta}(f)=:\underline{S}(f)=\overline{S}(f):=\lim_{|\Delta|\to 0}\overline{S}^{\Delta}(f)=\inf_{\Delta}\overline{S}^{\Delta}(f)$$

が成り立つ．但し， $|\Delta|=\sup_{n=0,1,\dots}|y_{n+1}-y_n|$ である．

注意 Riemann 和の場合には，Darboux の定理は，

$$\begin{aligned}0\le\sup_{\Delta}\underline{S}_{\Delta}(f)=\lim_{|\Delta|\to 0}\underline{S}_{\Delta}(f) &= \underline{\int_a^b} f(x)dx\\ &\le \overline{\int_a^b} f(x)dx=\lim_{|\Delta|\to 0}\overline{S}_{\Delta}(f)=\inf_{\Delta}\overline{S}_{\Delta}(f)\end{aligned}$$

を述べているだけで，$f(x)$ の Riemann 可積分性の要請 $\underline{\int_a^b} f(x)dx=\overline{\int_a^b} f(x)dx$ が成り立つための条件を別に確かめなければならない．ところが，Lebesgue の和の場合には，$\overline{S}(f)=\underline{S}(f)$ が既に成り立っているので，この共通の値をそのまま (Lebesgue 式の) 積分 $(\mathrm{L})\int_a^b f(x)dx$ として進めばよいことが示唆されている．この点こそ，**関数 $f(x)$ に即して $[a,b]$ を分割した Lebesgue の着想の適切性を示している**のである．後に示すように，Riemann 可積分な関数は Lebesgue の意味で可積分であり，さらに $(\mathrm{R})\int_a^b f(x)dx=(\mathrm{L})\int_a^b f(x)dx$ となるのみならず，Riemann 積分可能でない Dirichlet 関数は Lebesgue 可積分になるので，Lebesgue 積分は Riemann 積分の本質的な拡張となっているのである． □

補題 1.4. y 軸の分割 Δ に対して，それに分点を一点だけ付け加えて得られる y 軸の新たな分割を Δ' とすれば，

$$\underline{S}^{\Delta}(f)\le\underline{S}^{\Delta'}(f),\qquad \overline{S}^{\Delta'}(f)\le\overline{S}^{\Delta}(f)$$

となる．

Proof: (補題 1.3 と証明の方針は同じである) y 軸の分割 Δ を

$$\Delta:0=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_n<\cdots,\ \ \lim_{n\to\infty}y_n=\infty$$

とし，Δ の分点 y_k と y_{k+1} の間に一点 y' を付け加えたとし，

$$E_k = \{x \in [a,b] :\ y_k \le f(x) < y_{k+1}\}$$

に対して

$$E_k' = \{x \in [a,b] :\ y_k \le f(x) < y'\}, \quad E_k'' = \{x \in [a,b] :\ y' \le f(x) < y_{k+1}\}$$

とおけば，$E_k = E_k' \cup E_k''$, $E_k' \cap E_k'' = \varnothing$ である．よって，

$$\begin{aligned}
\overline{S}^{\Delta'}(f) &= \sum_{i=0}^{k-1} y_i \cdot m(E_i) + y' \cdot m(E_k') + y_{k+1} \cdot m(E_k'') + \sum_{i=k+1}^{\infty} y_i \cdot m(E_i) \\
&\le \sum_{i=0}^{k-1} y_i \cdot m(E_i) + y_{k+1} \cdot \Big(m(E_k') + m(E_k'')\Big) + \sum_{i=k+1}^{\infty} y_i \cdot m(E_i) \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} y_i \cdot m(E_i) + y_{k+1} \cdot m\big(E_k' \cup E_k''\big) + \sum_{i=k+1}^{\infty} y_i \cdot m(E_i) \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} y_i \cdot m(E_i) + y_{k+1} \cdot m(E_k) + \sum_{i=k+1}^{\infty} y_i \cdot m(E_i) = \overline{S}^{\Delta}(f)
\end{aligned}$$

となる．$\underline{S}^{\Delta'}$ についても同様である． □

Proof of Theorem 1.2 ： 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，下限・上限の定義により，

$$\overline{S}(f) \le \overline{S}^{\Delta_1}(f) \le \overline{S}(f) + \varepsilon$$

となるような y 軸の分割 Δ_1 と，

$$\underline{S}(f) - \varepsilon \le \underline{S}^{\Delta_2}(f) \le \underline{S}(f)$$

となるような y 軸の分割 Δ_2 とがある．分割 Δ_1 と分割 Δ_2 の分点全体を分点とするような y 軸の分割を Δ とすると，上に示した補題により

$$\underline{S}^{\Delta_1}(f) \le \underline{S}^{\Delta}(f) \le \overline{S}^{\Delta}(f) \le \overline{S}^{\Delta_2}(f)$$

である．ここで，分割 Δ に適当に分点を付け加えた分割：

$$\Delta' : 0 = y_0' < y_1' < \cdots < y_n' < \cdots$$

においては，$0 \le y_{n+1}' - y_n' \le \varepsilon/(b-a)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots, \cdots)$ となっているように取る．ここで，$E_n' = \{x \in [a,b] :\ y_n' \le x < y_{n+1}'\}$ とおけば，

$$\begin{aligned}
0 \le \overline{S}^{\Delta'}(f) - \underline{S}^{\Delta'}(f) &= \sum_{n=0}^{\infty} (y_{n+1}' - y_n') \cdot m(E_n') \\
&\le \varepsilon (b-a)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} m(E_n') = \varepsilon (b-a)^{-1} (b-a) = \varepsilon
\end{aligned}$$

となる．ゆえに，

$$\underline{S}(f)-\varepsilon \leq \underline{S}^{\Delta_2}(f) \leq \underline{S}^{\Delta}(f) \leq \underline{S}^{\Delta'}(f) \leq \overline{S}^{\Delta'}(f) \leq \overline{S}^{\Delta}(f) \leq \overline{S}^{\Delta_1}(f) \leq \overline{S}(f)+\varepsilon$$

$$\underline{S}(f)-\varepsilon \leq \underline{S}^{\Delta'} \leq \underline{S}(f), \qquad \overline{S}(f) \leq \overline{S}^{\Delta'}(f) \leq \overline{S}(f)+\varepsilon$$

より，

$$\left|\overline{S}(f)-\underline{S}(f)\right| \leq \left|\overline{S}(f)-\overline{S}^{\Delta'}(f)\right|+\left|\overline{S}^{\Delta'}(f)-\underline{S}^{\Delta'}(f)\right|+\left|\underline{S}^{\Delta'}(f)-\underline{S}(f)\right| \leq 3\varepsilon$$

を得るが，$\varepsilon>0$ は任意であったから $\overline{S}(f)=\underline{S}(f)$ でなければならない． □

上のような Lebesgue の着想による積分論を展開するためには，(1.5) のような条件を満たす測度 $m(E)$ の定義される集合 $E \subset [a,b]$ を把握しなければならない．Lebesgue はこのような集合 E を**可測集合** (measurable set) と呼んだ．可測というのは，区間の長さの概念を一般化した値 $m(E)$ で E の‘長さ’を測ることが出来るという意味であろう．そうして上の仮定 1 として被積分関数 f に要請したことから示唆されるように，すべての y_i 及び $y_{i+1}>y_i$ に対して集合 $\{x \in [a,b] : y_i \leq f(x) < y_{i+1}\}$ は可測集合になっていなければならない．このような要請に従う f は**可測関数** (measurable function) であると呼ばれる．**可測集合**及びその**測度** (measure) m の概念は，(1.5) の示唆するように．次の諸条件を満足することが望ましい：

$$\text{区間 } [a,b] \text{ は可測集合であり，かつ } m([a,b])=b-a, \tag{1.6}$$

$$E \subset [a,b] \text{ が可測集合ならば，} E^c=[a,b]\backslash E \text{ も可測集合であり，かつ } m(E)+m(E^c)=b-a, \tag{1.7}$$

$$E_1, E_2 \subset [a,b] \text{ が可測集合ならば，和集合 } E_1 \cup E_2 \text{ も可測集合である，} \tag{1.8}$$

$$\text{互いに素な可測集合の列 } E_n \subset [a,b]，(E_n \cap E_m=\varnothing,\ n \neq m) \text{ に対して，その和集合 } \textstyle\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \text{ も可測集合となり，かつ } m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)=\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n). \tag{1.9}$$

条件 (1.9) は測度 m の**完全加法性** (complete additivity) あるいは**σ-加法性**と呼ばれているものである．

ここで，われわれは‘長さ’を測ることが出来るという測度 m を考えるといったが，11 頁の図における E_n は，5 つの区間からなっているが，E_n がいつもこのような簡単な点集合とは限らないのである．それならば，‘区間でないような点集合’の長さ（測度）とは何を意味するのか，これを前もって決めてかからないと，これまでの議論の意味がなくなってしまう．

一方で，点集合の‘長さ’を議論しようとすると，そもそもの点集合に関する知識が必要となる．そこで，次の節において，集合論からの復習を行い，それを踏まえて，長さの概念の拡張である**測度**について話を進めていく．

Chapter 2

集合論からの復習

2.1　記号

この小節では，以降使用する記号の説明や，言葉の復習を行う：

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$　(自然数全体)
- $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\}$　(整数全体)
- $\mathbb{Q} := \left\{ \dfrac{p}{q} : p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \right\}$　(有理数全体)
- $\mathbb{R}$: 実数全体

このとき，$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ なる包含関係がある．

上限・下限

$A \subset \mathbb{R}$ とする．このとき，適当な $M \in \mathbb{R}$ が存在して，

$$x \in A \quad \Longrightarrow \quad x \leq M$$

を満たすとき，集合 A は**上に有界** (bounded from above) であるといい，このときの M は A の**上界** (upper bound) という．M が集合 A の上界とすると，$M' \geq M$ となる M' も明らかに A の上界となる．すなわち，上に有界な集合 A の上界はたくさんある．そこで，このような上界の中で，もっとも小さい数が存在するのであるが，これを A の**上限** (least upper bound) とよび，$\boldsymbol{\sup A}$ で表す． $L = \sup A$ とすると，この意味は，

- $x \in A \implies x \leq L,$
- $L' < L \implies L' < x'$ となる $x' \in A$ が存在する

ということである．同じように，集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して，適当な $m \in \mathbb{R}$ が存在して，

$$x \in A \quad \Longrightarrow \quad x \geq m$$

を満たすとき，A は**下に有界** (bounded from below) といい，m を A の**下界** (lower bound) という．さらに，下界のうち最も大きいものがあって，それを A の**下限** (greatest lower bound) と言い表し，$\boldsymbol{\inf A}$ で表す．$\ell = \inf A$ とすると，この意味は，

- $x \in A \implies \ell \leq x$,
- $\ell < \ell' \implies x' < \ell'$ となる $x' \in A$ が存在する

ということである．特に，上に有界な集合 A の上限が A の元でとれるとき，上限は最大値と一致する．同じく，下に有界な集合の下限がその集合の中に取れるとき，下限は最小値と一致する．

例題 2.1. (1) $\sup(a,b) = \sup[a,b] = b$. なお，$\max[a,b] = \sup[a,b] = b$ であるが，(a,b) の上限 b は (a,b) に属さない．すなわち，(a,b) には最大値を取る元は存在しない．

(2) $\inf(a,b) = \inf[a,b] = a$. また，$\min[a,b] = \inf[a,b] = a$ であるが，(a,b) の下限 a は (a,b) に属さない．すなわち，(a,b) には最小値を取る元は存在しない．

例題 2.2. A を偶数全体：$A = \{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$ とすると，$A \subset \mathbb{N}(\subset \mathbb{R})$ である．ところで，$L > 0$ に対して，

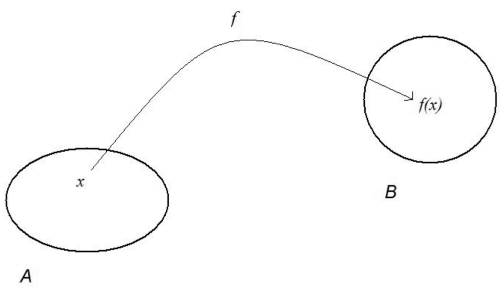
$$L < 2([L]+1) \in A$$

となる．すなわち，任意の $L > 0$ を超える元が A に存在するので，A は有界でないことがわかる．ここで， $[L]$ は L を超えない最大の整数を意味する．

問題 2.1. $A \subset \mathbb{R}$ を上に有界な集合とする．$B \subset A$ とするとき，B も上に有界な集合となることを示せ．

2.2 写像・関数

A, B を任意の集合とする．このとき，A の各点 x に対して，B の点 $f(x)$ が対応しているとき，A を**定義域** (domain) とし，B の中への**写像** (map) f が与えられたという．このとき，$f : A \longrightarrow B$ や $A \xrightarrow{f} B$ と書く．



特に $B \subset \mathbb{R}$ ととれるとき，f を A **上の関数**，あるいは A **で定義された関数**などという．さらに $A \subset \mathbb{N}$ であるとき f は**数列** (sequence) ともいう ($a_1 = f(1), a_2 = f(2), a_3 = f(3), \ldots,$ と考える)．

写像 $f : A \longrightarrow B$ を考える． $C \subset A$ とするとき，f による C の像全体を

$$f(C) = \{f(x) \in B : \ x \in C\} \subset B$$

と表す．特に，$f(A) = B$ となるとき，f は A から B の**上への写像**，あるいは A から B への**全射**写像 (surjective map) という．また，

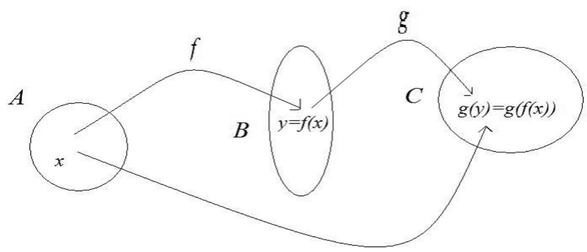
$$x, y \in A,\ x \neq y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \neq f(y)$$

となるとき，f は**一対一の写像**，あるいは**単射**写像 (injective map) という．

例題 2.3. $A = B = \mathbb{N}$ とし，$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ を $f(x) = 2x, \quad x \in \mathbb{N}$ として定義すると，f は単射である．実際，$x \neq y$ であれば，$f(x) = 2x \neq 2y = f(y)$ だからである．また，f の値域は偶数全体 $2\mathbb{N} := \{2x : x \in \mathbb{N}\}$ $(\subset \mathbb{N})$ である．言い換えると，$f : \mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N}$ は全単射である．

問題 2.2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = (1 + e^{-x})^{-1},\ x \in \mathbb{R}$ によって定義するとき．f が単射になっていること，また $f(\mathbb{R}) = (0, 1)$ であることを示せ．

A, B, C を集合とし，$f : A \longrightarrow B,\ g : B \longrightarrow C$ とするとき，A から C への写像を次のようにして定義する：$x \in A$ に対して $g(y) \in C$ を対応させる，但し，$y = f(x) \in B$



これを $g \circ f$ と書いて，f と g の**合成写像** (composition) という．また，$Y \subset B$ に対して

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\}$$

を，Y の f による**原像** (pre-image) とよぶ．

問題 2.3. $f : A \longrightarrow B$ とする．$Y_1, Y_2 \subset B$ とするとき

$$f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2) = f^{-1}(Y_1 \cup Y_2), \quad f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) = f^{-1}(Y_1 \cap Y_2)$$

を示せ．

次に，$f : A \longrightarrow B$ を単射写像とすると，$y \in f(A)$ であって，$y = f(x)$ となる $x \in A$ はただ一つしかないことと同じである．すると $f(A)$ から A への写像が与えられる：

$$f^{-1} : f(A) \longrightarrow A, \quad y \in f(A),\ f^{-1}(y) := x \quad (\text{但し，} f(x) = y)$$

これを f の**逆写像** (inverse map) という．この写像も $f(A)$ から A への単射写像となる（何故?）．

特に重要なのは，$f : A \longrightarrow B$ が全単射な写像の場合である．このとき，$f : A \sim B$ あるいは $A \overset{f}{\sim} B$ と書き表す．集合 A から B への全単射写像が存在するとき

$$A \sim B$$

と書くことにすると，次の**同値関係** (equivalent relation) が成り立つ：

(i) $A \sim A$

(ii) $A \sim B$ ならば，$B \sim A$

(iii) $A \sim B$ かつ $B \sim C$ ならば，$A \sim C$

実際，(i) は $f(x) = x, x \in A$ とおけばよい．(ii) は $f : A \sim B$ とすると，$f^{-1} : B \sim A$ より明らか．(iii) は $f : A \sim B,\ g : B \sim C$ とすると，$g \circ f : A \sim C$ となる． □

さて，A を任意の集合とする．もしある自然数 $n \in \mathbb{N}$ があって，

$$A \sim \{1, 2, \ldots, n\}$$

となるとき，A は**有限集合** (finite set) といわれる．空集合 $\varnothing$ も有限集合と考える．有限集合でない集合は**無限集合** (infinite set) と呼ばれる．A が無限集合で $A \sim B$ であるとき，B も無限集合となる．実際，B が有限集合とすると，先の (iii) により A も有限集合とならなければいけないはず．

無限集合 A に対して，A から $\mathbb{N}$ への単射な写像が存在するとき，A を**可算集合** (countable set) と呼ぶ．

問題 2.4. A を可算集合とするとき，$A \sim \mathbb{N}$ となること，すなわち，A から $\mathbb{N}$ への全単射写像が存在することを示せ．

例題 2.4. (1) 偶数全体の集合 $2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, \ldots,\}$ は可算集合である．実際，$x \in 2\mathbb{N}$ に対して，$f(x) = x/2$ とおけば，これが全単射を与える写像となる．

(2) 整数全体 $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ は $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$ であるが，可算集合となる．これは，$f(0) = 1, f(1) = 2, f(-2) = 3, f(3) = 4, f(-3) = 5, \cdots,$ 一般に n が自然数の時には $f(n) = 2n,\ f(-n) = 2n + 1$ と定義すると，この f により $f : \mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$ となる．

(3) 開区間 $(0, 1)$ は可算集合でない．

問題 2.5. 上の例題の (3) を示せ．

可算集合と有限集合を総称して，**高々可算集合**という．

問題 2.6. 集合 A が高々可算集合であるための必要十分条件は，A から自然数全体 $\mathbb{N}$ への単射写像が存在することである．これを示せ．

今，A を可算集合とすると，

$$f : \mathbb{N} \sim A$$

である全単射写像がある．このとき，

$$f(1) = a_1,\ f(2) = a_2,\ f(3) = a_3, \cdots, f(n) = a_n, \cdots$$

と書くことにすると，

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}$$

となる．

補題 2.1. 高々可算集合の部分集合は高々可算集合である．特に有限集合の部分集合は有限集合である．

<u>可算集合のいろいろ</u>

A, B を任意の集合とするとき，

$$A \times B = \{(x, y) :\ x \in A,\ y \in B\}$$

を A と B の**デカルト積** (Cartesian product)，または単に**直積**集合 (direct product) という．

例題 2.5. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ は，m, n を整数としたとき，平面上の点 (m, n) 全体からなる集合である．$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ の元の表す平面上の点は**格子点** (lattice point) ということもある．

例題 2.6. (1) 自然数全体の集合の直積 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ は可算集合である．

(2) 有理数のすべてからなる集合 $\mathbb{Q}$ は可算集合である．

問題 2.7. $a < b$ のとき $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ は可算集合であることを示せ．

問題 2.8. 平面状の格子点の集合 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ は可算集合であることを示せ．

問題 2.9. A, B を共に可算集合とする．このとき，その直積 $A \times B$ も可算集合となることを示せ．

2.3 集合の演算

A, B を任意の集合とするとき，$A \cup B$ は A と B の和集合を表す．ここでは，さらに進んで可算個の集合の和や共通集合について考えていくこととする．

集合の列 $A_1, A_2, A_3, \ldots$ に対して，これらのいづれかの集合に属すような元全体を

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots, \quad \text{あるいは} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

で表し，$\{A_n\}$ の**合併集合**，あるいは**和集合** (union) という．また，この集合列のすべての集合に属するような元全体を

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots, \quad \text{あるいは} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

で表し，$\{A_n\}$ の**交わり**，あるいは**共通集合** (intersection) という．

例題 2.7. 各 n に対して，$A_n = (-n, n)$ とすると，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n) = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}.$$

例題 2.8. $A_n = [0, 1-1/n],\ B_n = [0, 1+1/n)$ とおくと，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}[0, 1-1/n] = [0,1), \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}[0, 1+1/n) = [0,1].$$

問題 2.10. $A_i = [1/i, 1+1/i],\ i = 1, 2, \ldots$ のとき，

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

をそれぞれ求めよ．

もっと一般に，Λ を任意の集合とし，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して集合 A_λ が対応しているものとする．このとき，$A_\lambda,\ \lambda \in \Lambda$ のいずれかに属しているような元全体を

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

と書き表し，$\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の和集合と呼ぶ．同じく，すべての A_λ に属しているような元全体を

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

と書き表し，$\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の交わり，あるいは共通集合と呼ぶ．

例題 2.9. $a < b$ とし，$\Lambda = (0, (b-a)/2)$ とし，$A_\delta = [a+\delta, b-\delta),\ \delta \in \Lambda$ とおくと，

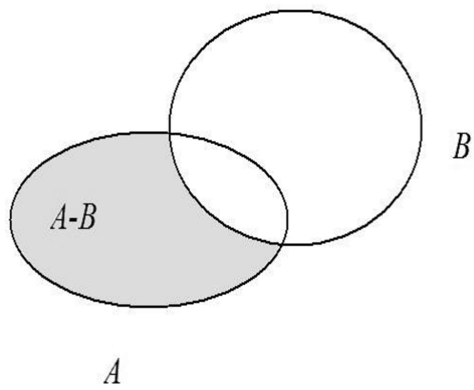
$$\bigcup_{\delta \in \Lambda} A_\delta = \bigcup_{\delta \in \Lambda}[a+\delta, b-\delta) = (a, b)$$

となる．

問題 2.11. (1) $\bigcap_{n=1}^{\infty}(0, 1/n)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\bigcap_{\delta \in \Delta}(a-\delta, b+\delta)$ を求めよ．但し，$a < b,\ \Delta = (0, +\infty)$ とする．

集合 A, B に対して，A に属するが，B には属さないような元全体を $A - B$ と書き表し，A と B の**差集合** (difference set) という： $A - B := \{x \in A : x \notin B\}$.



注意 2.1. 差集合 $A - B$ は $A \setminus B$ という記号で書き表すこともある．

例題 2.10. $A - B = A - (A \cap B)$ が成り立つ．
実際，$x \in A - B$ なら，$x \in A$ かつ $x \notin B$，したがって $x \in A$ かつ $x \notin A \cap B$ より，$x \in A - (A \cap B)$ が成り立つ．逆に，$x \in A - (A \cap B)$ とすると，$x \in A$ かつ $x \notin A \cap B$ より，当然 $x \notin B$ である．

問題 2.12. $B, A_\lambda,\ \lambda \in \Lambda$ に対して，以下の等号（いずれも de Morgan の公式という）を示せ：

$$B - \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda}(B - A_\lambda), \qquad B - \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda}(B - A_\lambda).$$

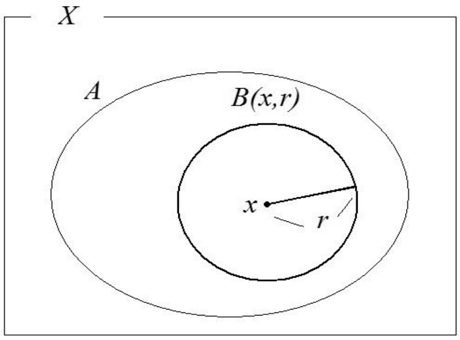
2.4 距離空間における開集合

(X,ρ) を距離空間 (metric space) とする，すなわち，X は集合で，ρ は $X\times X$ から $\mathbb{R}$ への写像で，次の三つの条件を満たすものとする：

- $\rho(x,y)\ge 0$. さらに $x=y$ であることと $\rho(x,y)=0$ であることは同値.
- $\rho(x,y)=\rho(y,x)$.
- $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)$.

このとき，$x\in X,\ r>0$ とするとき，

$$B(x,r)=\{y\in X:\ \rho(x,y)<r\}$$



とおいて，$B(x,r)$ を点 x の **r-近傍** (neighborhood) という．あるいは，x を中心とする半径 r の**開球** (open ball at x with raduis r) ということもある．X の部分集合 A について考える．$x\in A$ に対して，十分小さい $r>0$ をとると

$$B(x,r)\subset A$$

となるとき，x は A の**内点** (interior point) といわれる．

例題 2.11. $X=[a,b]$ を考える．但し，$a<b$ とする．このとき，$x,y\in X$ に対して $\rho(x,y)=|x-y|$ とおけば，(X,ρ) は距離空間となる．このとき，

- $a<x<b$ とする．このとき，$0<r=\min\{x-a,b-x\}$ とおくと，$x-r\ge x-(x-a)=a$, $x+r\le x+(b-x)=b$ より
$$B(x,r)=(x-r,x+r)\subset[a,b]$$
となるので，x は $[a,b]$ の内点であることがわかる．
- $x=a$ とおくと，$r>0$ をどんなに小さくとっても $a-r/2\in(a-r,a+r)=B(a,r)$ であるが，$a-r/2\notin[a,b]$ となる．したがって，$a\in[a,b]$ であるが，a は $[a,b]$ の内点ではない．同様に $x=b$ も $[a,b]$ の内点でないことがわかる．

集合 A のすべての点が A の内点となっているとき，A は**開集合** (open set) であるという．実数全体 $\mathbb{R}$ に，通常の距離を入れて出来る距離空間 (実数空間という[1]) において，$\mathbb{R}$ 自身は開集合であることがわかる．以下，空集合 $\varnothing$ は開集合と規約する．

例題 2.12. $X=[a,b]$ とし，X 上に通常の距離をいれて距離空間として考える．このとき，$A=(a,b)$ は開集合となる．実際，任意の $x\in(a,b)$ 対して，$a<x<b$ より前の例と同じく，$0<r=\min\{x-a,b-a\}$ とおくと，$B(x,r)=(a-r,b+r)\subset[a,b]$ となるので，x は $A=(a,b)$ の内点となっているので，(a,b) は開集合である．

[1]もっと一般に，一次元数空間といったり，一次元ユークリッド空間といったりする．

問題 2.13. $\mathbb{R}$ を実数空間とする．このとき，$\mathbb{R}$ から，有限個の点を除いた集合を A とすると，A は開集合となることを示せ．$\mathbb{R}-\mathbb{N}$ も開集合となることを示せ．

命題 2.1. (X,ρ) を距離空間とする．

(1) $G_1,G_2,\ldots,G_n$ を開集合とする．このとき，$\bigcap_{i=1}^n G_i$ は開集合となる．

(2) $G_\lambda,\ \lambda\in\Lambda$ を開集合の集合族とする．このとき，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ は開集合となる．

Proof: (1) $\bigcap_{i=1}^n G_i=\varnothing$ ならば規約により，これは開集合である．よって $\bigcap_{i=1}^n G_i\neq\varnothing$ のときを考えればよい．そこで，$x\in\bigcap_{i=1}^n G_i$ とする．すると，各 $k=1,2,\ldots,n$ に対して $x\in G_k$ であり，各 G_k は開集合より適当な正数 $r_k>0$ が存在して，$B(x,r_k)\subset G_k$ となる．このとき，$r=\min\{r_1,r_2,\ldots,r_n\}>0$ とおくと，$B(x,r)\subset B(x,r_k)\subset G_k$ がすべての $k=1,2,\ldots,n$ に対して成立する，すなわち

$$B(x,r)\subset\bigcap_{k=1}^n G_k$$

となり，x は $\bigcap_{k=1}^n G_k$ の内点であることがわかった．よって，$\bigcap_{k=1}^n G_k$ は開集合である．

(2) $x\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ とすると，適当な $\lambda\in\Lambda$ について $x\in G_\lambda$ である．G_λ は開集合であるから，$r>0$ で $B(x,r)\subset G_\lambda$ となるものが取れる．よって，$B(x,r)\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ より，x は $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ の内点である．ゆえに，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ は開集合であることが示された． □

注意 2.2. 上の命題の (1) で，'有限個' の仮定は外せない．実際，$X=(-2,2)$ において $G_n=(-1-1/n,1+1/n),\ n=1,2,\ldots$ を考えると，各 G_n は開集合であるが，

$$\bigcap_{n=1}^\infty G_n=\bigcap_{n=1}^\infty\Big(-1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\Big)=[-1,1]$$

となり，これは開集合とはならない．

集合 A に対して，その内点全体の集合を $\overset{\circ}{A}$ で表し，A の**内部** (interior) という：

$$\overset{\circ}{A}=\{x\in A:\exists r>0\quad\text{s.t.}\quad B(x,r)\subset A\}.$$

よって，明らかに $\overset{\circ}{A}\subset A$. また，$G$ が A に含まれる開集合であれば $G\subset\overset{\circ}{A}$ であることが示される．

問題 2.14. 上のことを示せ．すなわち，G が A に含まれる開集合とするとき，$G\subset\overset{\circ}{A}$ となる．

また，A が開集合であるとは $A=\overset{\circ}{A}$ が成立することと言っても良い．さらに，$\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}}=\overset{\circ}{A}$ が成り立つ．

例題 2.13. $\overset{\circ}{[a,b]}=(a,b),\ \overset{\circ}{(a,b]}=\overset{\circ}{[a,b)}=(a,b)$.

<u>$\mathbb{R}$ の開集合の構造</u>

$(a,b]$ なる **(左半開) 区間**を，以降簡単のために**半開区間**ということとする．次の命題は，次章以降で定義する $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度を構成する上で重要な役割を果たすものである．

命題 2.2. $G \subset \mathbb{R}$ を開集合とする．このとき，G は，互いに素な半開区間の（高々可算個の）集合列の和として表すことが出来る．

Proof: G を開集合とする．いま，

$$(n, n+1] \subset G$$

を満たす $n \in \mathbb{Z}$ 全体の集合を Λ_1 とする，すなわち，$\Lambda_1 = \{n \in \mathbb{Z} : \ (n, n+1] \subset G\}$ とする．このとき，

$$A_1 = \bigcup_{n \in \Lambda_1} (n, n+1]$$

とおく．ここで，$n \in \Lambda_1$ ならば $(n, n+1] \subset G$ であるので，$A_1 \subset G$ となる．

次に，$\Lambda_2 = \big\{n \in \mathbb{Z} : \ \big(n/2, (n+1)/2\big] \subset G - A_1\big\}$ とおき，A_2 を次のように定義する：

$$A_2 = \bigcup_{n \in \Lambda_2} \big(n/2, (n+1)/2\big].$$

以下，$p = 1, 2, 3, \dots$ に対して帰納的に

$$\Lambda_p := \Big\{n \in \mathbb{Z} : \ \big(n/2^{p-1}, (n+1)/2^{p-1}\big] \subset G - \bigcup_{k=1}^{p-1} A_k\Big\}$$

とし，A_p を

$$A_p = \bigcup_{n \in \Lambda_p} \big(n/2^{p-1}, (n+1)/2^{p-1}\big]$$

とおくと，ここに，集合列 $A_1, A_2, A_3, \dots,$ が得られる．これらの集合が互いに素であることは作り方から明らかである．さらに，各 A_p も互いに素な半開区間の集合列の和であるから，

$$A = \bigcup_{p=1}^{\infty} A_p$$

も互いに素な半開区間の集合列の和であることも明らかである．後は $A = G$ が示されれば証明は終わる．作り方から $A \subset G$ であるので，$G \subset A$ を示すことが出来れば良い．

$x \in G$ とする．このとき，ある $r > 0$ が存在して，$B(x, r) \subset G$ となるが，この $r > 0$ に対して

$$\frac{1}{2^{p-1}} < r$$

となる $p \in \mathbb{N}$ を一つ固定する．$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \big(n/2^{p-1}, (n+1)/2^{p-1}\big]$ に注意すると，ある $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$x \in \big(n/2^{p-1}, (n+1)/2^{p-1}\big]$$

である．従って，p の取り方から

$$\big(n/2^{p-1}, (n+1)/2^{p-1}\big] \subset B(x, r) = (x - r, x + r),$$

すなわち，$x \in G$ ならば，ある整数 n 及び自然数 p に対して

$$x \in \bigl(n/2^{p-1}, (n+1)/2^{p-1}\bigr] \subset G$$

となるから，そのような p のうちで最小のものをとれば

$$\bigl(n/2^{p-1}, (n+1)/2^{p-1}\bigr] \subset G - \bigcup_{k=1}^{p-1} A_k$$

となる．よって，$x \in A_p \subset A$. すなわち $G \subset A$. □

2.5 距離空間における閉集合

(X, ρ) を距離空間とする． $A \subset X$ のとき，

$$A^c := X - A$$

とおいて，A^c を A の**補集合** (compliment) という．すると明らかに

$$\bigl(A^c\bigr)^c = A$$

となる．すなわち，A の補集合の補集合は A である．また，

$$A \subset B \quad \text{ならば} \quad B^c \subset A^c$$

である．この記号を用いると，次の版の de Morgan の等式が成立する：

$$\Bigl(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Bigr)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c, \qquad \Bigl(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Bigr)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c.$$

なお，$A - B = A \cap B^c$ となることに注意する．開集合の補集合を**閉集合** (closed set) と呼ぶことにする．$X = \varnothing^c$ で，$\varnothing$ は開集合（と規約していた）から，X は閉集合である．また，X そのものは開集合でもあったから，全体集合 X は開集合でもあり閉集合でもある．

例題 2.14. $X = \mathbb{R}$ とする．$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ に対して $\{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ 及び $\{x \in \mathbb{R} : x > b\}$ は共に開集合であることがわかるから，

$$[a, b] = \Bigl(\{x \in \mathbb{R} : x < a\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x > b\}\Bigr)^c$$

は閉集合であることが分かる．

例題 2.15. A を有限個の点を除いた点の集合とすると，A は開集合であったことから（問題 2.10 を見よ），A^c，すなわち有限個の点集合は閉集合である．とくに一点集合は閉集合である．

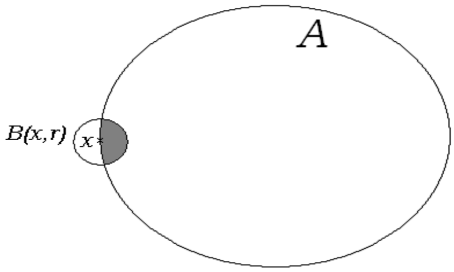
問題 2.15. $A = \{0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$ は $\mathbb{R}$ の閉集合であることを示せ．一方，
$B = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$ は閉集合でも開集合でもないことを示せ．

例題 2.16. $(a,b]$ において b は $(a,b]$ の点ではあるが，内点ではないため， $(a,b]$ は開集合ではない．従って，この集合の補集合 $(a,b]^c$ は閉集合ではない．

(X,d) を距離空間とし，A を X の部分集合とする．$x \in X$ が A の**触点** (adherent point) であるとは，任意の $r > 0$ に対して

$$B(x,r) \cap A \neq \varnothing$$

となるときをいう．A の触点全体の集合を A^a あるいは，$\overline{A}$ と表す．これを A の**閉包** (closure) と呼ぶこともある．任意の $x \in A$ に対して，どんな $r > 0$ をとっても， $x \in B(x,r)$ であるから，$x \in B(x,r) \cap A$ より，A の点は A の触点となる．よって $A \subset A^a$ である．



しかし，A の触点は必ずしも A の点であるとは限らない．

例題 2.17. $A = (a,b]$ を考える．a に対して，$a \notin (a,b]$ であるが，任意の $r > 0$ をとると，

$$B(a,r) \cap (a,b] = (a-r, a+r) \cap (a,b] \neq \varnothing$$

より，a は $(a,b]$ の触点である．

命題 2.3. 任意の集合 A の触点全体の集合 A^a は閉集合となる．

Proof: A^a の補集合が開集合であることを示せばよい．そこで，$x \in \left(A^a\right)^c$ とする．すなわち，x を A の触点でないとする．すると，適当な正数 r が存在して，

$$B(x,r) \cap A = \varnothing$$

となる．以下 $B(x,r) \subset \left(A^a\right)^c$ を示す． 実際，そのときには x が $\left(A^a\right)^c$ の内点であることがわかる．よって x の任意性より $\left(A^a\right)^c$ は開集合となり，その補集合である A^a は閉集合となる．そこで，$y \in B(x,r)$, $y \neq x$ を任意に取る．このとき，$0 < s = \min\{\rho(x,y), r - \rho(x,y)\}$ とすると，$B(y,s) \subset B(x,r)$ となる．よって，$B(y,s) \cap A = \varnothing$ が成り立つ．これは，y が A の触点でないことを表している．ゆえに $y \in \left(A^a\right)^c$. y は任意だったから $B(x,r) \subset \left(A^a\right)^c$ が成立する．

□

特に集合 A について，$A = A^a$ が成立することと A が閉集合であることとは同値である．

問題 2.16. 上のことを示せ．

注意 2.3. もっと詳しく，集合 A について，$x \in X$ について，どんな $r > 0$ をとっても，

$$B(x,r) \cap \Big(A - \{x\}\Big) \neq \varnothing$$

となるとき， x を A の**集積点** (accumulation point，cluster point) という．明らかに x が A の集積点ならば，x は A の触点となっている．集積点でない触点のことを A の**孤立点** (isolated point) という．

2.6 無限大の記号

$+\infty$ や $-\infty$ という記号は微積分においてもすでに登場している．$f(x)=x^{1/3}$ とすると，$f'(0)=+\infty$ などの使い方で．Lebesgue 積分においては，実数に準じた性格を与え，実数に準じた扱いをする．

まず，実数全体の集合 $\mathbb{R}$ に $+\infty, -\infty$ を付け加えた集合を $\overline{\mathbb{R}}$ で表し**拡張された実数** (extended real numbers) と呼ぶ：

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

このとき，A ($A \subset \mathbb{R}$) から $\overline{\mathbb{R}}$ の中への写像も A を定義域とする関数と呼ぶことにする．特に，A から $\mathbb{R}$ への写像は A を定義域とする**有限な関数**と呼ぶこともある．また，x が (拡張された) 実数で，$+\infty$ でも $-\infty$ でもないとき，このことを強調するために，x を**有限な数**ということがある．

$\triangleright$ $\overline{\mathbb{R}}$ の元の大小関係について，次のような約束をする： a が実数 (有限な数) とするとき，

$$a < +\infty \quad \text{かつ} \quad -\infty < a.$$

また，

$$-\infty < +\infty.$$

なお，

$$\begin{aligned}
(a, +\infty) &= \{x \in \overline{\mathbb{R}} :\ a < x < +\infty\}, \quad (-\infty, a) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} :\ -\infty < x < a\}, \\
[a, +\infty) &= \{x \in \overline{\mathbb{R}} :\ a \le x < +\infty\}, \quad (-\infty, a] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} :\ -\infty < x \le a\}, \\
[a, +\infty] &= \{x \in \overline{\mathbb{R}} :\ a \le x \le +\infty\}, \quad [-\infty, a] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} :\ -\infty \le x \le a\}, \\
&(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}, \quad [-\infty, +\infty] = \overline{\mathbb{R}}
\end{aligned}$$

などの記号も用いられる．

$\pm\infty$ という記号を導入することにより，§2.1 で定義した上限・下限の概念が有界でない点集合についても次のようにして定義される：A が上に有界でないときは，$\sup A = +\infty$ とおいて $+\infty$ を A の上限という．これは，次の二つの条件が成立することと同じになる：

$$『\sup A = +\infty』 \iff 『\text{(i) } x \in A \implies x \le +\infty,\ \text{(ii) } L < +\infty \implies \exists x \in A \text{ s.t. } x > L』$$

同様に，下に有界でないときは $\inf A = -\infty$ とおいて，$-\infty$ を A の下限という．

問題 2.17. $\inf A = -\infty$ であることと同値な条件を $\sup A = +\infty$ の場合と同じように書き下せ．

$\triangleright$ $\pm\infty$ に関係のある加減乗除について，次の**約束**を設ける：

- a を有限な実数とするとき，
  - $a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$
  - $a - (+\infty) = -\infty$
  - $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
  - $a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$
  - $(-\infty) - a = -\infty$
  - $a - (-\infty) = +\infty$
  - $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

- $a > 0$ ならば，
  - $a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = +\infty$
  - $a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty$
- $a < 0$ ならば，
  - $a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = -\infty$
  - $a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = +\infty$
- さらに，
  - $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$
  - $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
  - $(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$
  - $\dfrac{a}{+\infty} = \dfrac{a}{-\infty} = 0$
  - $0 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 0 = 0$
  - $0 \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot 0 = 0$

注意 2.4. $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$, $(-\infty) + (+\infty)$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\dfrac{a}{0}$, $\dfrac{\pm\infty}{0}$ などの演算は定義されない．これらの演算は無意味なものとして取り扱わないことと約束する．なお，最後の $0 \cdot (\pm\infty), (\pm\infty) \cdot 0$ などは通常は無意味とされているが，積分論ではこれを 0 に等しいとして定めておいたほうが便利である．

<u>数列の極限値</u>

$\pm\infty$ を導入したので，これからは数列

$$\{a_n\} := \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$$

に対して，$a_n = +\infty$ や $a_n = -\infty$ であってもいいことにする．こう約束した上で，数列 $\{a_n\}$ の**極限値**を次のように定義する：

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n \iff {}^{\forall}\lambda, \Lambda \text{ with } \lambda < \alpha < \Lambda,\ {}^{\exists}N \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \lambda < a_n < \Lambda \quad \text{for all} \quad n \geq N.$$

ここで，$\alpha = +\infty$ であるときは，$\alpha < \Lambda$ となる Λ はないので，$\lambda < a_n < \Lambda$ の代わりに $\lambda < a_n$ とする．同様に $\alpha = -\infty$ であるときは，$\lambda < \alpha$ となる λ はないので，$\lambda < a_n < \Lambda$ の代わりに $a_n < \Lambda$ とする．

注意 2.5. $-\infty < \alpha < +\infty$ であるときは，上の定義は通常の ε-δ 流の定義と一致する：

$${}^{\forall}\varepsilon > 0,\ {}^{\exists}N \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon \quad \text{for all} \quad n \geq N.$$

問題 2.18. 上のことを示せ．

数列はいつでも極限値を持つとは限らないが，いわゆる**上極限・下極限**はいつでも定義できる．これは，$A_n = \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$ としたとき，

$$\overline{a}_n = \sup A_n \qquad \underline{a}_n = \inf A_n$$

とおくと，$\{\overline{a}_n\}$ は単調非増加数列，$\{\underline{a}_n\}$ は単調非減少数列となるから，$\overline{\mathbb{R}}$ の中にそれぞれ極限値 $\overline{\alpha}$, $\underline{\alpha}$ が存在する．もっというと，

$$\overline{\alpha} = \inf\{\overline{a}_1,\ \overline{a}_2,\ \overline{a}_3, \ldots, \overline{a}_n, \ldots\}, \quad \underline{\alpha} = \sup\{\underline{a}_1,\ \underline{a}_2,\ \underline{a}_3, \ldots, \underline{a}_n, \ldots\}$$

である．このとき，

$$\boldsymbol{\overline{\alpha} := \limsup_{n\to\infty} a_n := \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n, \qquad \underline{\alpha} := \liminf_{n\to\infty} a_n := \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n}$$

という記号で表す．

例題 2.18. $a_n = (-1)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ とすると，

$$\overline{a}_{2n} = \overline{a}_{2n-1} = 1 + \frac{1}{2n}, \qquad \underline{a}_{2n} = \underline{a}_{2n+1} = -1 - \frac{1}{2n+1}$$

より，

$$\limsup_{n\to\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1, \qquad \liminf_{n\to\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = -1.$$

□

以下，上極限・下極限の性質をいくつか述べておく．

命題 2.4. $\overline{\alpha} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$ となる必要十分条件は以下の二つの条件 (i),(ii) が成り立つことである：

(i) $\lambda < \overline{\alpha}$ ならば，$\lambda < a_n$ となる a_n が無限個ある，

(ii) $\overline{\alpha} < \lambda$ ならば， $\lambda \leq a_n$ となる a_n は高々有限個しかない．

Proof: $\overline{\alpha} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$ とする．このとき，$A_n = \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$ に対して，$\overline{a}_n = \sup A_n$ とおいたとき，$\overline{\alpha} = \lim_{n\to\infty} \overline{a}_n$ であるから，

$$\lambda < \overline{\alpha} < \Lambda \implies {}^{\exists} N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } {}^{\forall} n \geq N,\ \lambda < \alpha_n < \Lambda.$$

ここで，$\overline{a}_n = \sup A_n$ より，$\lambda < a_n$ ならば，$\lambda < x$ となる $x \in A_n$ が存在する，すなわち，ある番号 $p_1 \in \mathbb{N}$ に対して $a_{n+p_1} > \lambda$ となる．次に $\overline{a}_{n+p_1} = \sup A_{n+p_1}$ に対しても， $\lambda < x$ となる $x \in A_{n+p_1}$ が存在する．従って，ある番号 p_2 に対して，$a_{n+p_1+p_2} > \lambda$ となる．従って，これを繰り返していくことにより (i) がいえることが分かる．また，$\overline{\alpha} < \lambda$ とすると，$\sup A_n < \lambda$ より，任意の $x \in A_n$ に対して $x < \lambda$，すなわち $k \geq n$ に対して，$a_k < \lambda$ が成立する．言い換えると，$a_\ell \geq \lambda$ となる a_ℓ は高々n 個である．これは，(ii) を示している．

次に (i)(ii) を仮定する．このとき，(i) より，$\lambda < \overline{\alpha}$ を満たす任意の λ に対して，$\overline{a}_n = \sup A_n \geq \lambda$ となる．従って，$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \geq \lambda$，すなわち，$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \geq \overline{\alpha}$ となる．また，$\overline{\alpha} < \lambda$ を満たす任意の λ に対して，(ii) より，十分大きい N をとると，任意の n について，常に $a_{n+N} \leq \lambda$ となる． これは，$\overline{a}_N \leq \lambda$ であること，従って $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \leq \lambda$, すなわち，$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \leq \overline{\alpha}$ を示している．ゆえに $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \overline{\alpha}$ となることがわかった．

□

問題 2.19. $\underline{\alpha} = \varliminf_{n\to\infty} a_n$ であるための必要十分条件は，次の (i)'(ii)' であることを示せ：

(i)' $\lambda > \underline{\alpha}$ ならば，$\lambda > a_n$ となる a_n が無限個ある，

(ii)' $\underline{\alpha} > \lambda$ ならば，$\lambda \geq a_n$ となる a_n は，高々有限個しかない.

問題 2.20. 任意の n について $a_n \leq b_n$ となっているとき，

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n, \qquad \limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n$$

が成立することを示せ.

問題 2.21. 任意の n について，$a_n \leq a_{n+1}$ となるとき，$\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在し，しかも

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$$

となることを示せ.

問題 2.22. $\liminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup_{n\to\infty} a_n$ となることを示せ.

注意 2.6. 以降，簡単のため $+\infty$ は ∞ と表記することもある.

Chapter 3

可測空間及び測度空間

序章でのべたように，Lebesgue の考えに基づいた積分論を展開するためには，“長さ”（それを測度という）の測ることの出来る集合のクラスについて把握する必要がある．その本質は

“**可算演算で閉じた体系**”

を扱う点である．

ところで,『集合と位相』においては，**開集合族**（これを位相と呼んだ）を定義して，位相のいろいろな性質を学んだ．ここでは，それに対応する概念として**可測集合族**というものがあり，それが上に述べた “可算演算で閉じた体系 ” を形作っている．そうして，その可測集合族上に測度を構成することになる．そこで，可測集合族の定義から始めよう．

3.1 可測空間

定義 3.1. X を空でない集合とし，$\mathcal{A}$ を X の巾集合 $\mathcal{P}(X)$ の部分集合とする．すなわち，$\mathcal{A}$ は X の幾つかの部分集合からなる部分集合族とする．$\mathcal{A}$ が X 上の **σ-加法族** (σ-field)，または **σ-代数** (σ-algebra) であるとは，以下の条件を満たすときをいう：

(M1) $X \in \mathcal{A}$,

(M2) $A \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad A^c = X - A \in \mathcal{A}$,

(M3) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

このとき，$\mathcal{A}$ の元のことを **($\mathcal{A}$-) 可測集合** ($\mathcal{A}$-measurable set) と呼ぶ.

注意 3.1. (M3) の代わりに有限個の和に関して閉じているという条件：

(M3)' $A, B \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{A}$

を考える．$\mathcal{A}$ が (M1)(M2)(M3') を満たすとき，X 上の**有限加法族** (field または finitely additive class) と呼ぶ.

σ-加法族の定義から，次の性質が分かる．

命題 3.1. X を集合，$\mathcal{A}$ をその上の σ-加法族とする．このとき，次が成り立つ．

(1) $\varnothing \in \mathcal{A}$;

(2) $A, B \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{A}$;

(3) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Proof: (1) は (M1) と (M2) より明らか．実際，$X \in \mathcal{A}$ より，$\varnothing = X^c \in \mathcal{A}$. (2) は，$A_1 = A,\ A_2 = B,\ A_n = \varnothing,\ n \geq 3$ とすれば，(M3) より

$$A \cup B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}.$$

次に $A_n \in \mathcal{A}$ $(n \in \mathbb{N})$ とすると，(M2) より $A_n^c \in \mathcal{A}$ がわかるから，de Morgan の公式と共に (M3) を用いると，

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c \in \mathcal{A}.$$

□

問題 3.1. X を空でない集合する． 次のことを示せ．

(i) $\mathcal{P}(X)$ は X 上の σ-加法族となる．

(ii) $B \subset X$ とする．このとき，$\{\varnothing, B, B^c, X\}$ は X 上の σ-加法族となる．

(iii) $B \subset X$ とする．このとき，$\{\varnothing, B, X\}$ は X 上の σ-加法族とはならない．

(iv) $\mathcal{A} = \{A \subset X :\ A$ または A^c が高々可算集合$\} \cup \{\varnothing\}$ とすると，$\mathcal{A}$ は X 上の σ-加法族となる．

定義 3.2. X を空でない集合，$\mathcal{A}$ をその上の σ-加法族とするとき，組 $(X, \mathcal{A})$ を**可測空間** (measurable space) と呼ぶ．

命題 3.2. (Trace σ-field) $(X, \mathcal{A})$ を可測空間とする．$B \subset X$ に対して，

$$\mathcal{A}_B = \Big\{B \cap A :\ A \in \mathcal{A}\Big\}$$

と定義すると，$(B, \mathcal{A}_B)$ は可測空間となる．言い換えると，$\mathcal{A}_B$ は B 上の σ-加法族となる．

問題 3.2. 上の命題を証明せよ．

命題 3.3. X を空でない集合，$(Y, \mathcal{F})$ を可測空間とする．$f : X \longrightarrow Y$ を写像とするとき，

$$\mathcal{A} = \Big\{f^{-1}(B) :\ B \in \mathcal{F}\Big\}$$

とおくと，$(X, \mathcal{A})$ は可測空間となる．言い換えると，$\mathcal{A}$ は X 上の σ-加法族となる．これを $\mathcal{A} = f^{-1}(\mathcal{F})$ と書くことがある．

Proof: (M1): $X = f^{-1}(Y)$, $Y \in \mathcal{F}$ より，$X \in \mathcal{A}$ がわかる．
(M2): 逆像の定義により，$f^{-1}(B^c) = \big(f^{-1}(B)\big)^c$, $B \in \mathcal{F}$．よって，$A = f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ $(B \in \mathcal{F})$ とすると，$A^c = f^{-1}(B^c)$ より $A^c \in \mathcal{A}$.
(M3): $A_n = f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$ $(B_n \in \mathcal{F})$, $n = 1, 2, \ldots$ とすると，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big), \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{F}$$

より $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. □

定理 3.1. X を空でない集合とする．

(1) $\{\mathcal{A}_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ を X 上の σ-加法族の集合族とする．すると $\displaystyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ も X 上の σ-加法族となる．

(2) $\mathcal{C}$ を X の部分集合族とする（すなわち，$\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ である）．このとき，$\mathcal{C}$ を含む X 上の σ-加法族で最小のものが存在する． これを $\sigma(\mathcal{C})$ と書き表し，**$\mathcal{C}$ より生成される σ-加法族**という．言い換えると，$\sigma(\mathcal{C})$ は次を満たす X 上の σ-加法族である：

  (a) $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C})$

  (b) $\mathcal{G}$ を，$\mathcal{C}$ を含む任意の X 上の σ-加法族とすると，$\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{G}$.

Proof: (1): $\mathcal{A} := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ とし，$\mathcal{A}$ が X 上の σ-加法族であることを示そう．任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して，$X \in \mathcal{A}_\lambda$ より，(M1) がわかる．$A \in \mathcal{A}$ とすると，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して，$A \in \mathcal{A}_\lambda$ であり，従って $A^c \in \mathcal{A}_\lambda$ となることから (M2) もわかる．次に $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ とする．すべての $k \in \mathbb{N}$ とすべての $\lambda \in \Lambda$ に対し，$A_k \in \mathcal{A}_\lambda$ である．よって，$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}_\lambda$ がすべての $\lambda \in \Lambda$ に対して成り立つ．故に (M3) が成り立つ．従って，$\mathcal{A}$ が X 上の σ-加法族であることが分かった．
(2):

$$\mathcal{A} := \bigcap_{\substack{\mathcal{G}:X\ \text{上の}\sigma\text{-加法族} \\ \mathcal{G} \supset \mathcal{C}}} \mathcal{G}$$

とおく． 明らかに $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ であり，$\mathcal{P}(X)$ は X 上の σ- 加法族であるから，少なくとも上で共通部分をとる集合は空でない．すなわち，$\mathcal{A}$ は意味を持つ (well-defined)．$\mathcal{A}$ の定義において，すべて $\mathcal{C}$ を含んでいるので，$\mathcal{A} \supset \mathcal{C}$ は明らか．次に $\mathcal{A}'$ を $\mathcal{C}$ を含む，任意の X 上の σ-加法族とすると，$\mathcal{A}$ はその様なもののすべての共通部分であるので，$\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ である．よって，$\mathcal{A}$ は (a)(b) を満たすことがわかる． □

注意 3.2. (i) もし $\mathcal{C}$ 自身が σ-加法族であれば，$\mathcal{C} = \sigma(\mathcal{C})$ である．

(ii) $A \subset X$ のとき， $\sigma(\{A\}) = \{\varnothing, A, A^c, X\}$ である．

(iii) もし $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ であれば，$\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{B}) \subset \sigma(\mathcal{C})$.

問題 3.3. X を空でない集合とし，$A, B \subset X$ とする．このとき，$\sigma(\{A, B\})$ を具体的に書き下せ．

Borel 集合族

X を d 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^d$ とするとき，その上に標準的な σ-加法族が与えられる．それは，開集合族を含む最小の σ-加法族である．それを紹介するために，次のことを思い出しておこう．

$$\text{『}\ O \subset \mathbb{R}^d \text{ が開集合である} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in O,\ \exists \delta > 0 \ \text{ s.t. } \ B(x, \delta) \subset O\ \text{』}$$

ここで，$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^d :\ |x - y| < r\}$ は x を中心とする半径 r の開球であった．$\mathcal{O}^d$ を開集合全体を表すとすると，次の位相の性質を持つことは学んだ：

(O1) $\varnothing,\ \mathbb{R}^d \in \mathcal{O}^d$

(O2) $U, V \in \mathcal{O}^d \quad \Longrightarrow \quad U \cap V \in \mathcal{O}^d$

(O3) $U_\lambda \in \mathcal{O}^d,\ \lambda \in \Lambda \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}^d$

定義 3.3. $\mathcal{O}^d$ によって生成される $\mathbb{R}^d$ 上の σ-加法族を **Borel σ-加法族**，あるいは単に **Borel 集合族**とよび，$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ または $\mathcal{B}^d$ 等と書き表す：$\sigma(\mathcal{O}^d) =: \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ の一つ一つの元を Borel 可測集合，あるいは単に Borel 集合と呼ぶ．

Borel 集合族は，$\mathbb{R}^d$ 上の測度を考える上では非常に重要である．

定理 3.2. $\mathbb{R}^d$ 上の閉集合全体を $\mathcal{C}^d$, コンパクト集合全体を $\mathcal{K}^d$ を表すことにする．このとき，

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{O}^d) = \sigma(\mathcal{C}^d) = \sigma(\mathcal{K}^d)$$

が成り立つ．すなわち，閉集合全体の生成する $\mathbb{R}^d$ 上の σ-加法族，コンパクト集合全体の生成する $\mathbb{R}^d$ 上の σ-加法族は，開集合全体の生成する σ 加法族である Borel 集合族と一致する．

Proof: コンパクト集合は閉集合であるから $\mathcal{K}^d \subset \mathcal{C}^d$. 故に，**注意 3.2**(iii) より，$\sigma(\mathcal{K}^d) \subset \sigma(\mathcal{C}^d)$. 一方，$C$ を任意の有界閉集合とし，$\overline{B(0,k)}$ を原点中心, 半径 k の閉球を表すとすれば，$C_k := C \cap \overline{B(0,k)}$ はコンパクト集合であり，かつ $C = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$. 各 k について, $C_k \in \mathcal{K}^d \subset \sigma(\mathcal{K}^d)$ であり，また $\sigma(\mathcal{K}^d)$ は σ-加法族であるから，

$$C = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \in \sigma(\mathcal{K}^d)$$

となる．よって，$\mathcal{C}^d \subset \sigma(\mathcal{K}^d)$ となる．よって，$\sigma(\mathcal{C}^d)$ の最小性より，$\sigma(\mathcal{C}^d) \subset \sigma(\mathcal{K}^d)$ がわかる．以上より $\sigma(\mathcal{C}^d) = \sigma(\mathcal{K}^d)$ となる．

$\left(\mathcal{O}^d\right)^c := \{O^c : O \in \mathcal{O}^d\}$ とおくと，$\left(\mathcal{O}^d\right)^c = \mathcal{C}^d$ である．よって，$\mathcal{C}^d = \left(\mathcal{O}^d\right)^c \subset \sigma(\mathcal{O}^d)$ より $\sigma(\mathcal{C}^d) \subset \sigma(\mathcal{O}^d)$ となる． 逆の包含関係も同様に示される． □

問題 3.4. 上の定理の証明における最後の主張，“逆の包含関係も $\cdots$ ” を実際に証明せよ．

問題 3.5.

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 &:= \big\{(-\infty, b]:\ b\in\mathbb{R}\big\}, & \mathcal{I}_2 &:= \big\{(-\infty, b):\ b\in\mathbb{R}\big\}\\
\mathcal{I}_3 &:= \big\{[a, +\infty):\ a\in\mathbb{R}\big\}, & \mathcal{I}_4 &:= \big\{(a, +\infty):\ a\in\mathbb{R}\big\}\\
\mathcal{I}_5 &:= \big\{[a, b]:\ a, b\in\mathbb{R}, a<b\big\}, & \mathcal{I}_6 &:= \big\{[a, b):\ a, b\in\mathbb{R}, a<b\big\}\\
\mathcal{I}_7 &:= \big\{(a, b]:\ a, b\in\mathbb{R}, a<b\big\}, & \mathcal{I}_8 &:= \big\{(a, b):\ a, b\in\mathbb{R}, a<b\big\}
\end{aligned}$$

とおくと，$\mathcal{B}(\mathbb{R})=\sigma(\mathcal{I}_1)=\sigma(\mathcal{I}_2)=\sigma(\mathcal{I}_3)=\sigma(\mathcal{I}_4)=\sigma(\mathcal{I}_5)=\sigma(\mathcal{I}_6)=\sigma(\mathcal{I}_7)=\sigma(\mathcal{I}_8)$ となることを示せ．すなわち，1 次元 Borel 集合族は，上のどの区間の集合族で生成される σ-加法族とも一致する．

上の問題は一般の $\mathbb{R}^d$ においても，それぞれに対応した形で構成される区間族に対しても成り立つことがわかる．簡単のために，以下の三つの集合族の場合だけを考える．

$$\mathcal{I}_1^d := \Big\{(a_1, b_1)\times(a_2, b_2)\times\cdots\times(a_d, b_d):\ a_i<b_i,\ i=1,2,\ldots,d\Big\},$$

$$\mathcal{I}_2^d := \Big\{(a_1, b_1]\times(a_2, b_2]\times\cdots\times(a_d, b_d]:\ a_i<b_i,\ i=1,2,\ldots,d\Big\},$$

$$\mathcal{I}_3^d := \Big\{[a_1, b_1]\times[a_2, b_2]\times\cdots\times[a_d, b_d]:\ a_i<b_i,\ i=1,2,\ldots,d\Big\}$$

とおく．ここで二つのベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_d)$ 及び $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, \ldots, b_d)$ に対して，

$$(\!(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\!] := (a_1, b_1]\times(a_2, b_2]\times\cdots\times(a_d, b_d],$$

$$(\!(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\!) := (a_1, b_1)\times(a_2, b_2)\times\cdots\times(a_d, b_d)$$

と言う記号を定めると，例えば

$$\mathcal{I}_1^d := \Big\{(\!(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\!) : \boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_d),\ \boldsymbol{b}=(b_1, b_2, \ldots, b_d)\in\mathbb{R}^d,\ a_i<b_i,\ i=1,2,\ldots,d\Big\},$$

$$\mathcal{I}_2^d := \Big\{(\!(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\!] : \boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_d),\ \boldsymbol{b}=(b_1, b_2, \ldots, b_d)\in\mathbb{R}^d,\ a_i<b_i,\ i=1,2,\ldots,d\Big\}$$

等と表示出来る．このとき，$\mathcal{I}_1^d$ や $\mathcal{I}_2^d$ の元 $(\!(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\!)$, $(\!(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\!]$ を $\boldsymbol{d}$**-次元区間**などと呼ぶ．

補題 3.1.

$$\mathcal{D} := \left\{(\!(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\!) :\ \begin{matrix}\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_d),\ \boldsymbol{b}=(b_1, b_2, \ldots, b_d)\in\mathbb{R}^d\\ a_i<b_i,\ a_i, b_i\in\mathbb{Q},\ i=1,2,\ldots,d\end{matrix}\right\}$$

とおくと，$\mathcal{D}$ は可算集合であり，更に $\mathcal{O}^d$ の基底となる．

Proof: はじめに $\mathbb{Q}^d$ は $\mathbb{R}^d$ で稠密であったことを思い出しておく．また，

$$\mathcal{B} := \big\{B(x_i, r) : i\in\mathbb{N},\ r>0\big\}$$

は，$\mathcal{O}^d$ の可算基底[1]であった．ただし，$\{x_i:\ i\in\mathbb{N}\}=\mathbb{Q}^d$. そこで，任意の $B(x_i, r)\in\mathcal{B}$ に対して，適当な $(\!(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\!)\in\mathcal{D}$ が存在して，$(\!(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\!)\subset B(x_i, r)$ となることを示せばよい．ところで，$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_d)$, $r>0$ に対して

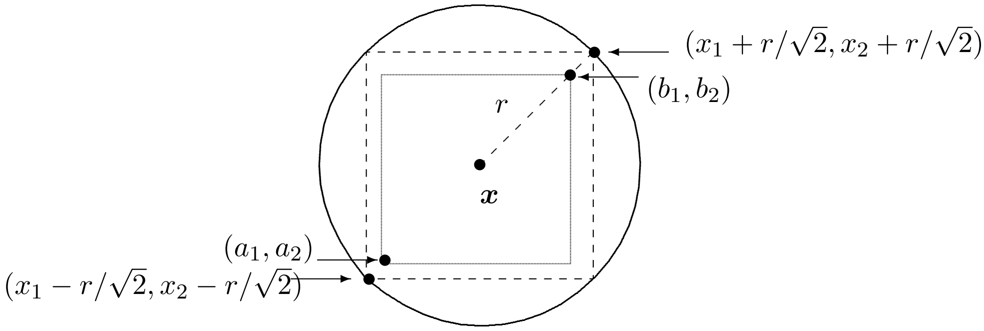
$$(x_1-\frac{r}{\sqrt{d}}, x_1+\frac{r}{\sqrt{d}})\times(x_2-\frac{r}{\sqrt{d}}, x_2+\frac{r}{\sqrt{d}})\times\cdots(x_d-\frac{r}{\sqrt{d}}, x_d+\frac{r}{\sqrt{d}})\subset B(\boldsymbol{x}, r)$$

[1] ここで，**基底**の復習をしておこう．位相空間 (X, τ) に対して，τ の部分集合 $\mathcal{B}$ が τ の基底であるとは，任意の $x\in X$ 及び $x\in O$ を満たす任意の $O\in\tau$ に対して，適当な $U\in\mathcal{B}$ が存在して，$x\in U\subset O$ とできるときを言う．特にその様な $\mathcal{B}$ が可算個の元からなるとき，$\mathcal{B}$ は τ の可算基底と呼ばれる．

が成り立つので，適当な有理数の組 (a_i, b_i), $a_i < b_i$, $i = 1, 2, \ldots, d$ で，

$$x_i - \frac{r}{\sqrt{d}} < a_i < x_i < b_i < x_i + \frac{r}{\sqrt{d}}, \quad i = 1, 2, \ldots, d$$

を満たすものが存在する．



よって，$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_d)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_d)$ とおけば，

$$((\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})) \in \mathcal{D} \quad \text{かつ} \quad ((\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})) \subset B(\boldsymbol{x}, r)$$

となる． □

定理 3.3. 以下が成立する．

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{I}_1^d) = \sigma(\mathcal{I}_2^d).$$

Proof: 明らかに $\mathcal{I}_2^d \subset \mathcal{O}^d$ より，$\sigma(\mathcal{I}_2^d) \subset \sigma(\mathcal{O}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ が成り立つ．一方，上の補題で示した，$\mathcal{D}$ は $\mathcal{O}^d$ の可算基底であることに注意すると，任意の開集合 $O \in \mathcal{O}^d$ 及び任意の $x \in O$ に対して，適当な $((\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})) \in \mathcal{D}$ が存在して， $x \in ((\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})) \subset O$ とできる．よって，このような $((\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}))$ に対して，点 x を O 全体で動かすと，明らかに

$$\bigcup_{x \in O} ((\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})) = O$$

であるが，$\mathcal{D}$ は可算であるから，実際は，上の和を取る操作は高々可算である．すなわち，適当な可算集合 $\{((\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_i)),\ i \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{D}$ が存在して，

$$O = \bigcup_{i=1}^{\infty} ((\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_i))$$

とできる．ところで，各 $i \in \mathbb{N}$ について，$((\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_i)) \in \mathcal{D} \subset \mathcal{I}_1^d \subset \sigma(\mathcal{I}_1^d)$ より，

$$O = \bigcup_{i=1}^{\infty} ((\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_i)) \in \sigma(\mathcal{I}_1^d),$$

すなわち，$\mathcal{O}^d \subset \sigma(\mathcal{I}_1^d)$, 従って，

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \sigma(\mathcal{O}^d) \subset \sigma(\mathcal{I}_1^d)$$

が成り立つ．$\mathcal{I}_2^d$ 及び $\mathcal{I}_3^d$ については，次のことに注意すると簡単に示されることが分かる．

$$((\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]] = \bigcap_{n=1}^{\infty}((\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}+\frac{1}{n}\mathbf{1})), \quad ((\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})) = \bigcup_{n=1}^{\infty}((\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}-\frac{1}{n}\mathbf{1}]]$$

$$[[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]] = \bigcap_{n=1}^{\infty}((\boldsymbol{a}-\frac{1}{n}\mathbf{1},\boldsymbol{b}+\frac{1}{n}\mathbf{1})), \quad ((\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})) = \bigcup_{n=1}^{\infty}[[\boldsymbol{a}+\frac{1}{n}\mathbf{1},\boldsymbol{b}-\frac{1}{n}\mathbf{1}]].$$

ただし，$\mathbf{1} = (1,1,\ldots,1) \in \mathbb{R}^d$ である． □

問題 3.6. 上の定理の証明で，$\sigma(\mathcal{I}_2^d) = \sigma(\mathcal{I}_3^d)$ を実際に示せ．

3.2 測度 (measure)

この節において，積分論を展開する上での基礎となる**測度** (measure) について説明していく．測度は，数直線上における**長さ** (length)，平面における**面積** (area)，空間における**体積** (volume) に相当する概念である．それが数学的にうまく定義されるためには，前節で述べた σ-加法族が必要となる．

先に定義を与えておこう．

定義 3.4. $(X,\mathcal{A})$ を可測空間とする．すなわち，X は空でない集合，$\mathcal{A}$ はその上の σ-加法族とする．写像 $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0,+\infty]$ は，次の二つの条件 (m1)(m2) を満たすとき，X 上の**測度**であるという：

(m1) $\mu(\varnothing) = 0,$

(m2) (**完全加法性:** σ-additivity) $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ が互いに素であるとき，
すなわち『 $i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing$ 』を満たすとき，

$$\mu\Bigl(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Bigr) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

このとき，三つ組み $(X,\mathcal{A},\mu)$ は，**測度空間** (measure space) と呼ばれる．特に，μ は，$\mu(X) < \infty$ を満たすとき**有限測度** (finite measure)，$\mu(X) = 1$ を満たすとき**確率測度** (probability measure) と呼ばれる．そのとき，測度空間 $(X,\mathcal{A},\mu)$ はそれぞれ**有限測度空間**, **確率空間**と呼ばれる．

また，適当な可測集合列 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ が存在して，

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_i \subset A_{i+1} \subset \cdots, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = X, \quad \mu(A_i) < \infty,\ i = 1,2,\ldots \tag{3.1}$$

を満たすとき，測度 μ は **$\boldsymbol{\sigma}$-有限** (σ-finite) と呼ばれる．

問題 3.7. $(X,\mathcal{A},\mu)$ を測度空間とするとき，(3.1) が成立することと，次の条件が成立することとは同値となることを示せ：適当な可測集合列 $\{A_i\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ が存在して，

$$A_i \cap A_j = \varnothing\ (i \neq j), \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X, \qquad \mu(A_i) < \infty,\ i = 1,2,\ldots \tag{3.2}$$

命題 3.4. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ を測度空間とするとき，以下の性質が成り立つ．

(1) (有限加法性) $A, B \in \mathcal{A}, \quad A \cap B = \varnothing \quad \Longrightarrow \quad \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$

(2) (単調性) $A, B \in \mathcal{A},\ A \subset B \quad \Longrightarrow \quad \mu(A) \leq \mu(B).$

(3) $A, B \in \mathcal{A},\ A \subset B,\ \mu(A) < \infty \quad \Longrightarrow \quad \mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A).$

(4) (強加法性) $A, B \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$

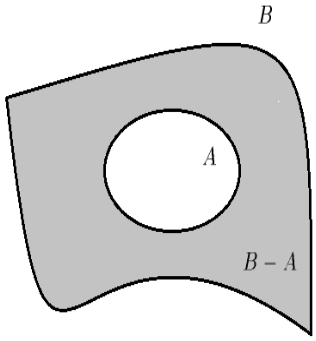
(5) (劣加法性) $A, B \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B).$

Proof: (1): $A_1 = A,\ A_2 = B,\ A_3 = A_4 = \cdots = \varnothing$ とおくと，$\{A_i\} \subset \mathcal{A}$ は互いに素であるから，(m2) により，

$$\mu(A \cup B) = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(\varnothing) + \cdots = \mu(A) + \mu(B).$$

(2): $A \subset B$ のとき，$B = A \cup (B - A)$ であり，また $A \cap (B - A) = \varnothing$ となる．よって，(1) により

$$\mu(B) = \mu\big(A \cup (B - A)\big) = \mu(A) + \mu(B - A) \geq \mu(A).$$



(3): $A \subset B$ のとき，(2) の証明の最後の式の等号において，$\mu(A) < \infty$ に注意して，両辺から $\mu(A)$ を引くと

$$\mu(B) - \mu(A) = \mu(B - A)$$

となる．

(4): まず $\mu(B) = \infty$ のときは，$B \subset A \cup B$ より $\mu(A \cup B) = \infty$ となるので，(4) の等式は両辺 ∞ として成立している．よって，$\mu(B) < \infty$ の場合に示せばよい．そこで，

$$A - B = (A \cup B) - B = A - (A \cap B), \quad B \subset A \cup B, \quad A \cap B \subset A$$

から，(3) を使うと，

$$\mu(A \cup B) - \mu(B) = \mu(A) - \mu(A \cap B).$$

(5): (4) より，

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \geq \mu(A \cup B).$$

□

定理 3.4. (測度に対する単調収束定理) $A_1, A_2, \ldots$ を可測集合とする．

(1) $A_i \subset A_{i+1}\ (i = 1, 2, \ldots)$ であれば，

$$\lim_{i \to \infty} \mu(A_i) = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big)$$

(2) $A_i \supset A_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ かつ $\mu(A_1) < \infty$ であれば，

$$\lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \mu\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\Big)$$

Proof: (1): $\mu(A_k) = \infty$ となるような $k \in \mathbb{N}$ があれば，両辺とも ∞ として成立する．そこで，すべての i について $\mu(A_i) < \infty$ として考える．このとき，$B_i = A_i - A_{i-1}$，$A_0 = \varnothing$ と定義すると，$\{B_i\}$ は互いに素な可測集合列である．$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ に注意すると，(m2) および先の命題の (3) から

$$\begin{aligned}
\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i - A_{i-1}) = \sum_{i=1}^{\infty} \Big(\mu(A_i) - \mu(A_{i-1})\Big) \\
&= \lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{i} \Big(\mu(A_k) - \mu(A_{k-1})\Big) \\
&= \lim_{i\to\infty} \mu(A_i).
\end{aligned}$$

(2): $B_i = A_1 - A_i$ とおくと，$B_1 \subset B_2 \subset \cdots$ であり，さらに

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \big(A_1 - A_i\big) = A_1 - \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i, \quad A_1 \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

であるから，(1) および先の命題の (3) より，

$$\mu(A_1) - \mu\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) = \lim_{i\to\infty} \mu(B_i) = \lim_{i\to\infty} \big(\mu(A_1) - \mu(A_i)\big).$$

□

系 3.1. (測度の可算劣加法性) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ を測度空間とする．任意の可測集合列 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ に対して，

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

が成り立つ．

Proof: 証明をはじめる前に，$\{A_i\}$ は互いに素である必要はないことに注意しておく． 各 $i \in \mathbb{N}$ に対して，$B_i = A_1 \cup \cdots \cup A_i$ とおくと，$\{B_i\}$ は単調増加な可測集合列である．よって，定理 3.4(1) および命題 3.4 (5) を繰り返し用いることにより，

$$\begin{aligned}
\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \;=\; \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) \;=\; \lim_{i\to\infty} \mu(B_i) \;&=\; \lim_{i\to\infty} \mu(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_i) \\
&\leq\; \lim_{i\to\infty} \Big(\mu(A_1) + \mu(A_2) + \cdots + \mu(A_i)\Big) \\
&=\; \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).
\end{aligned}$$

□

例題 3.1. (i) **(Dirac 測度または単位測度)** $(X,\mathcal{A})$ を可測空間とする．$x \in X$ を任意に取る．このとき，$\delta_x : \mathcal{A} \longrightarrow \{0,1\}$ を，$A \in \mathcal{A}$ に対して

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in A \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義すると，δ_x は $(X,\mathcal{A})$ 上の測度となる．これを，$\boldsymbol{x \in X}$ **に mass を持つ Delta 測度**と呼ぶ．

(ii) X を非可算集合とする．また $(X,\mathcal{A})$ を問題 3.1(iv) で与えられる可測空間とする．すなわち，『$A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow A$ または A^c が可算集合』．このとき，$\gamma : \mathcal{A} \longrightarrow \{0,1\}$ を，$A \in \mathcal{A}$ に対して，

$$\gamma(A) = \begin{cases} 0, & A \text{ が可算集合のとき} \\ 1, & A^c \text{ が可算集合のとき} \end{cases}$$

で定義すると，$(X,\mathcal{A},\gamma)$ は測度空間となる．

(iii) **(計数測度: Counting measure)** $(X,\mathcal{A})$ を可測空間とする．このとき，$A \in \mathcal{A}$ に対して，

$$|A| := \begin{cases} \sharp A, & A \text{ が有限集合のとき} \\ +\infty, & A \text{ が無限集合のとき} \end{cases}$$

とおくと，これは $(X,\mathcal{A})$ 上の測度を定める．この測度のことを**計数測度 (counting measure)** と呼ぶ．

(iv) **(離散確率測度: Discrete probability measure)** $\Omega := \{\omega_1,\omega_2,\ldots\}$ を可算とし，$\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ を非負の実数列で $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ を満たすものとする． このとき，可測空間 $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega))$ 上に集合関数 $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ を

$$\mathbb{P}(A) := \sum_{j\,:\,\omega_j \in A} p_j = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \delta_{\omega_k}(A), \quad A \subset \Omega$$

で定義すると，$\mathbb{P}$ は確率測度を定める．このとき，三つ組み $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathbb{P})$ を**離散確率空間**と呼ぶ．

問題 3.8. 上の例題の集合関数がそれぞれの可測空間上で実際に測度，または確率測度となっていることを示せ．

上で述べたいくつかの例は，本来我々が考えたい**長さ**，**面積**あるいは**体積**に対応したようなものではない．

定義 3.5. **($\mathbb{R}^d$ 上の Lebesgue 測度)** 可測空間 $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上で定義された集合関数 $\mathcal{L}^d$ で，d 次元区間 $((\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]] \in \mathcal{I}_2^d$ に対して

$$\mathcal{L}^d\big(((\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]]\big) = \prod_{i=1}^{d}(b_i - a_i) \tag{3.3}$$

で定義されるものを$\boldsymbol{d}$**-次元 Lebesgue 測度**とよぶ．ただし，$\boldsymbol{a} = (a_1,a_2,\ldots,a_d)$, $\boldsymbol{b} = (b_1,b_2,\ldots,b_d) \in \mathbb{R}^d$ は $a_i < b_i$ $(i = 1,2,\ldots,d)$ を満たすものとする．

注意 3.3. 上の定義は，$\mathbb{R}$ においては区間の長さ，$\mathbb{R}^2$ では長方形の面積，$\mathbb{R}^3$ では直方体の体積に一致している．従って，Lebesgue 測度は，その拡張になっていると思ってよい．しかしながら，果たして $\mathcal{L}^d$ が $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 上の集合関数として，条件 (m1)(m2) を実際に満たすように定義できるかは，現時点ではわからない．

さしあたって，次の定理も含めて，その幾つかの正当化および証明は後回しにして（次章以降の「測度の拡張」等において正当化される），それを満たすものとして話を進めていくことにする．

定理 3.5. **(Lebesgue 測度の存在とその性質)** 可測空間 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上で定義される d-次元 Lebesgue 測度 $\mathcal{L}^d$ は存在し，さらには次の性質を満たす．

(1) **(平行移動不変: translation invariant)** 任意の $x \in \mathbb{R}^d$ および $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\mathcal{L}^d(x + A) = \mathcal{L}^d(A).$$

但し，$x + A = \{x + y : \ y \in \mathbb{R}^d\}$.

(2) **(回転不変: rotation invatiant)** $R : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ における回転を表す線形変換 (言い換えると，R は d-次の回転行列を表す) とすると，任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ に対して．

$$\mathcal{L}^d(R^{-1}(A)) = \mathcal{L}^d(A).$$

但し，$R^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R}^d : Rx \in A\}$.

(3) M を d-次の正則行列（すなわち，可逆な正方行列）とすると，

$$\mathcal{L}^d(M^{-1}A) = \left|\det(M)\right|^{-1} \mathcal{L}^d(A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

注意 3.4. 上の定理で，A を Borel 可測集合とすると，$x + A, R^{-1}A, M^{-1}A$ も Borel 可測集合となっていることに注意する．そうでなければ $\mathcal{L}^d(x + A)$ などは意味を持たない．それに関しては次の命題を見よ．

命題 3.5. $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ を連続写像とする．このとき，A が Borel 集合であれば，$f^{-1}(A)$ も Borel 集合となる．但し，

$$f^{-1}(A) = \Big\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \in A\Big\}.$$

Proof: $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ が連続関数であるとは，任意の開集合 $O \in \mathcal{O}^d$ に対して，$f^{-1}(O) \in \mathcal{O}^d$ なることであった．ここで，開集合は Borel 集合であることに注意する．実際，Borel 集合族 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ は $\mathcal{O}^d$ の生成する σ-加法族であった．

さて，$\mathcal{F} := \big\{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) : \ f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\big\}$ とおくと，$\mathcal{F}$ は σ-加法族となる．実際，$\mathbb{R}^d$ は開集合であるから，f の連続性より $f^{-1}(\mathbb{R}^d)$ も開集合，従って Borel 集合となるので，$\mathbb{R}^d \in \mathcal{F}$ であることがわかる．次に $A \in \mathcal{F}$ とする．このとき，$f^{-1}(A^c) = \big(f^{-1}(A)\big)^c$ より，$A^c \in \mathcal{F}$ となることがわかる．最後に $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ とする．このとき，$f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i)$ 1 であり，各 $f^{-1}(A_i)$ は Borel 集合であるので，$f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$ も Borel 集合となる．故に $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ となる．よって，$\mathcal{F}$ は σ-加法族となる．明らかに $\mathcal{O}^d \subset \mathcal{F}$ であるから $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ となる．□

さて，$x\in\mathbb{R}^d$ に対して，$f_x:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}^d,\ f_x(y)=y-x, y\in\mathbb{R}^d$ とおくと，f_x は明らかに連続写像である．よって，いまの補題により $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$f_x^{-1}(A)=\{y\in\mathbb{R}^d:f_x(y)\in A\}=\{y\in\mathbb{R}^d:y-x\in A\}=x+A$$

も Borel 集合であることがわかる．

問題 3.9. 今示したことと同様に，R を回転を表す線形変換，M を正則変換としたとき，Borel 集合 A に対して $R^{-1}(A)$ および $M^{-1}(A)$ が Borel 集合となることを示せ．

さて，定義 3.3 において Lebesgue 測度の定義をしたが，Lebesgue 測度を含むより一般の Lebesgue-Stieltjes 測度と呼ばれる測度をまったく同様にして定義できる．ここでは，話を簡単にするために，d 個の増加関数を用いて定義することにする．

定義 3.6. (Lebesgue-Stieltjes 測度) 各 $i=1,2,\ldots,d$ に対して，$f_i:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ を右連続な単調増加関数とする．このとき，d 次元区間 $(\!(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\!]\in\mathcal{I}_2^d$ に対して，

$$m_f\big((\!(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\!]\big):=\prod_{i=1}^{d}\big(f_i(b_i)-f_i(a_i)\big)$$

で定義される $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の測度 m_f を，関数 $f=(f_1,f_2,\ldots,f_d)$ により生成される Lebesgue-Stiltjes 測度と呼ぶ．特に，すべての i について $f_i(x)=x$ のとき，それは Lebesgue 測度と一致する．

問題 3.10. $(X,\mathcal{A},\mu)$ を測度空間とし，$\Gamma\in\mathcal{A}$ とし，

$$\mu_\Gamma(A):=\mu(\Gamma\cap A),\quad A\in\mathcal{A}$$

と定義すると，$(X,\mathcal{A},\mu_\Gamma)$ も測度空間となることを示せ．

補題 3.2. $\{\alpha_{ij},\ i,j\in\mathbb{N}\}$ を二重数列 (double sequence) とする．このとき，

$$\sup_{i\in\mathbb{N}}\sup_{j\in\mathbb{N}}\alpha_{ij}=\sup_{j\in\mathbb{N}}\sup_{i\in\mathbb{N}}\alpha_{ij}$$

となる．すなわち，上限を入れ替えても変らない．特に i を固定するごとに α_{ij} が j に関して単調増加であり，さらには j を固定するごとに α_{ij} が i に関して単調増加であれば，

$$\lim_{i\to\infty}\lim_{j\to\infty}\alpha_{ij}=\lim_{j\to\infty}\lim_{i\to\infty}\alpha_{ij}$$

が成り立つ．

Proof: 任意の $i,j\in\mathbb{N}$ について，$\alpha_{ij}\le\sup\limits_{j\in\mathbb{N}}\alpha_{ij}$ である．よって，上の両辺で $i\in\mathbb{N}$ に関する上限をとると，$\sup\limits_{i\in\mathbb{N}}\alpha_{ij}\le\sup\limits_{i\in\mathbb{N}}\ \sup\limits_{j\in\mathbb{N}}\alpha_{ij}$ が任意の $j\in\mathbb{N}$ について成立する．ゆえに，

$$\sup_{j\in\mathbb{N}}\sup_{i\in\mathbb{N}}\alpha_{ij}\le\sup_{i\in\mathbb{N}}\sup_{j\in\mathbb{N}}\alpha_{ij}.$$

i と j の役割を入れ替えれば逆の不等式も出る． □

問題 3.11. 上の補題の後半の主張を証明せよ．

問題 3.12. $(X, \mathcal{A})$ を可測空間とする．また，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，μ_n をその上の測度とする．このとき，非負の実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，

$$\mu(A) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu_n(A), \quad A \in \mathcal{A}$$

と定義すると，μ は $\mathcal{A}$ 上の測度となることを示せ．

Hint: σ-加法性は，上の補題を用いよ．

問題 3.13. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ を確率空間とする．このとき，$\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ が，任意の $i \in \mathbb{N}$ について $\mathbb{P}(A_i) = 1$ を満たせば，$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1$ となることを示せ．

問題 3.14. (零集合: null sets) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ を測度空間とする．可測集合 $N \in \mathcal{A}$ は $\mu(N) = 0$ を満たすとき，μ-零集合 (μ-)null set と呼ばれる．いま，$\mathcal{N}_\mu$ を零集合全体を表すとする： $\mathcal{N}_\mu := \left\{N \in \mathcal{A} : \mu(N) = 0\right\}$. このとき，以下を示せ．

(i) $\varnothing \in \mathcal{N}_\mu$

(ii) $N \in \mathcal{N}_\mu,\ M \in \mathcal{A},\ M \subset N \quad \Longrightarrow \quad M \in \mathcal{N}_\mu$

(iii) $N_n \in \mathcal{N}_\mu,\ n = 1, 2, \ldots \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \in \mathcal{N}_\mu$.

問題 3.15. (完備化: Completion) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ を測度空間とする．上の問題で可測な零集合の可算和は再び零集合であることを見た．このことに動機付けられて，次の定義を考えることができる：測度空間 $(X, \mathcal{A}^*, \mu)$（あるいは，測度 μ）が**完備** (complete) であるとは，

$$N \in \mathcal{A}^*,\ M \subset N,\ \mu(N) = 0 \quad \Longrightarrow \quad M \in \mathcal{A}^*$$

を満たすときをいう． 以下は，$(X, \mathcal{A}, \mu)$ が完備とは限らないとして考えよ．

(i) $\mathcal{N} := \left\{M \subset X : \exists\ N \in \mathcal{A} \ \text{ s.t. } M \subset N,\ \mu(N) = 0\right\}$ とおき，

$$\mathcal{A}^* := \mathcal{A} \cup \mathcal{N} := \left\{A \cup M : A \in \mathcal{A},\ M \in \mathcal{N}\right\}$$

とおくと，$\mathcal{A}^*$ は $\mathcal{A}$ を含む X 上の σ-加法族となることを示せ．

(ii) $\mathcal{A}^*$ 上に μ を次のように拡張する：

$$\bar{\mu}(A^*) := \mu(A), \quad A^* = A \cup M,\ A \in \mathcal{A},\ M \in \mathcal{N}.$$

このとき，$\bar{\mu}$ は $\mathcal{A}^*$ 上の集合関数となっていること，言い換えると，$\mathcal{A}^*$ 上で well-defined であることを示せ．すなわち，A^* が $A^* = A \cup N = B \cup M,\ A, B \in \mathcal{A},\ M, N \in \mathcal{N}$ と異なる表示を持ったとしても，$\bar{\mu}(A^*)$ の値は変らないことを示せ．

(iii) $\bar{\mu}$ は $\mathcal{A}^*$ 上の測度となっていることを示し，特に $A \in \mathcal{A}$ のときには $\bar{\mu}(A) = \mu(A)$ となること，すなわち μ の拡張となっていることを示せ．これを μ の Lebesgue **拡大**という．

(iv) $(X, \mathcal{A}^*, \bar{\mu})$ は完備測度空間となることを示せ．

(v) $\mathcal{A}^* = \{B \subset X : \exists B_1, B_2 \in \mathcal{A} \text{ s.t. } B_1 \subset B \subset B_2,\ \mu(B_2 - B_1) = 0\}$ を示せ．

例題 3.2. $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathcal{L}^d)$ は完備ではないことが知られている．そこで，この測度空間を上の問題の手続きに従って完備化する．そうして $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ を完備化した σ-加法族を $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^d)$ と書いて，これを Lebesgue **可測集合族**という．そうして $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^d)$ の元を Lebesgue **可測集合**とよぶ．また，$\mathcal{L}^d$ の Lebesgue 拡大は同じ記号 $\mathcal{L}^d$ を用いることにする．

この操作によって三つ組み $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^d), \mathcal{L}^d)$ は完備な測度空間となるが，これを **d次元 Lebesgue 空間**と呼ぶ．

さて，この講義では極めて重要な 1 次元 Lebesgue 測度について，後で必要となる基本的な性質を幾つか述べておこう．但し，先にも述べたが，その存在や一意性については「測度の存在」の章で述べるので，ここではそれが存在するものとして考える．

はじめに，念のため $(\mathbb{R}, \mathfrak{L}(\mathbb{R}))$ における Lebesgue 測度の $\mathcal{L}$ の性質 (&定義) を改めて述べておこう[2]．

定理 3.6. Lebesgue 可測集合 $A \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ に対して，次のことが成り立つ：

(L1) $\mathcal{L}(\varnothing) = 0$

(L2) 任意の $A_n \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}),\ n = 1, 2, \ldots$ に対して，$A_i \cap A_j = \varnothing\ (i \neq j)$ を満たせば，

$$\mathcal{L}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}(A_n)$$

(L3) $a < b$ に対して，A が $[a, b)$ または $(a, b), (a, b], [a, b]$ のいずれかであれば，

$$\mathcal{L}(A) = b - a$$

(L4) 二つの Lebesgue 可測集合 A, B が合同であれば，$\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B)$. ここで，$A$ と B が合同であるとは，適当な $x \in \mathbb{R}$ が存在して，$A = x + B$ となるときを言う．

これにより，次のことがわかる．

例題 3.3. (i) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$\mathcal{L}(\{a\}) = 0$ である．すなわち，一点集合は Lebesgue 測度零である．実際，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\{a\} \subset [a, a + \frac{1}{n})$ より測度の単調性と Lebesgue 測度の性質 (L3) から

$$\mathcal{L}(\{a\}) \leq \mathcal{L}([a, a + \frac{1}{n})) = \frac{1}{n}$$

が成り立つ．よって，$n \to \infty$ とすれば，$\mathcal{L}(\{a\}) = 0$ が得られる．

[2](3.3) によると，1 次元 Lebesgue 測度は $\mathcal{L}^1$ と書くべきだが，1 次元の場合は特に $\mathcal{L}$ と書くことにする

(ii) 任意の点列 $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ に対して，$\mathcal{L}\bigl(\{a_1, a_2, \ldots\}\bigr) = 0$ である．

これは (i) と測度の完全加法性 (m2)(または (L2)) を用いると

$$\mathcal{L}\bigl(\{a_1, a_2, \ldots\}\bigr) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}(\{a_n\}) = 0.$$

□

Chapter 4

可測函数

この章では，測度に基づいて積分することが出来る関数のクラスを設定する．実際，すべての関数に対しては積分できないのである．そこで，積分できるための関数の条件 – 可測性 – を定義する．そうして，その可測な関数の性質を見ていくことにする．

4.1 可測函数

前章において測度空間 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ を定義し，σ-加法族 $\mathcal{A}$ の元を可測集合と呼んだ．このとき $\mu(A)$ を A の測度と呼ぶことにする．測度 μ に基づいて積分を考えるために，その土台となる可測函数の定義をここで与える．

定義 4.1. $A \in \mathcal{A}$ を固定する．f を可測集合 A 上で定義された関数とする．このとき，任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して

$$A(f > c) := \{x \in A : f(x) > c\}$$

が可測集合であるとき，f を **A 上の ($\mathcal{A}$)-可測函数** ($\mathcal{A}$-measurable function on A) と呼ぶ[1].

例題 4.1. $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathcal{L}^d)$ を考える．このとき，$\mathbb{R}^d$ 上の連続関数 f は Borel 可測函数である．実際，$(c, +\infty)$ は開集合であるから，連続関数の定義により

$$f^{-1}\big((c, +\infty)\big) = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) > c\} = \mathbb{R}^d(f > c)$$

は開集合となる．よって，開集合は Borel 集合だから，連続関数 f は Borel 可測函数となることがわかる．

□

以下 f が可測函数というときは，f は適当な可測集合上で定義されているものとする．

補題 4.1. 可測集合 $A \in \mathcal{A}$ 上で定義された関数 f について，任意の $r \in \mathbb{Q}$ に対して $A(f > r)$ が可測集合であるとすると，f は可測函数となる．

[1] 以下，$\mathcal{A}$-可測なものしか考えないから，当面 “$\mathcal{A}$-” は省略して，単に可測函数と呼ぶことにする．特に $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-可測であるとき，Borel 可測函数ということにする．

Proof: c を任意の実数とすると，適当な強義単調減少の有理数列 $\{r_n\} \subset \mathbb{Q}$ が存在して，$c = \downarrow \lim_{n\to\infty} r_n$ と出来る (次の問題を見よ)．すると，

$$A(f > c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(f > r_n)$$

であり，各 $A(f > r_n)$ は可測であるので，$A(f > c)$ も可測であることが分かる． □

問題 4.1. 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して，適当な強義単調増加な有理数列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$ 及び強義単調減少な有理数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$ が存在して，

$$t_n < t_{n+1} < x < s_{n+1} < s_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} s_n = x$$

を満たすようにできることを示せ．

補題 4.2. f が A 上の可測函数ならば，任意の実数 c に対して，次のいずれの集合も可測集合である：

$$A(f \le c), \quad A(f \ge c), \quad A(f < c), \quad A(f = c),$$
$$A(f < \infty), \quad A(f > -\infty), \quad A(f = \infty), \quad A(f = -\infty)$$

Proof: まず，$A(f \le c) = A - A(f > c)$, $A(f \ge c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A(f > c - 1/n)$ だから，$A(f \le c)$ 及び $A(f \ge c)$ は可測集合であることがわかる．また，$A(f < c) = A - A(f \ge c)$ であり，$A(f \ge c)$ が可測であることから $A(f < c)$ も可測であることがわかる．さらに，

$$\begin{aligned}
&A(f = c) = A(f \ge c) - A(f > c), \quad A(f < \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(f < n), \\
&A(f > -\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(f > -n), \qquad A(f = \infty) = A - A(f < \infty), \\
&A(f = -\infty) = A - A(f > -\infty)
\end{aligned}$$

であるので，それぞれの左辺は可測である． □

補題 4.3. A が可測であるとき，任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して，$A(f > c)$ が可測なことと，次のいずれの集合も可測であることとは同値である：

$$A(f \ge c), \qquad A(f \le c), \qquad A(f < c).$$

Proof: 先の補題により $A(f > c)$ が可測ならば，$A(f \ge c)$, $A(f \le c)$, $A(f < c)$ のいずれも可測集合であることがわかる．そこで，まず 任意の c について $A(f \ge c)$ が可測集合であるとすると，$A(f > c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(f \ge c + 1/n)$ であるので，$A(f > c)$ が可測であることが分かる．次に $A(f \le c)$ を可測とすると，$A(f > c) = A - A(f \le c)$ であるので $A(f > c)$ が可測であることが分かる．最後の，$A(f < c)$ が可測とすると，$A(f > c) = A - A(f \le c) = A - \bigcap_{n=1}^{\infty} A(f < c + 1/n)$ より $A(f > c)$ が可測であることが分かる． □

命題 4.1. f, g を，ともに可測集合 A 上の可測函数とする．このとき，以下の集合はいずれも可測集合となる：

(i) $A(f > g)$　　(ii) $A(f \geq g)$　　(iii) $A(f = g)$

Proof: <u>(i)</u>: $x \in A(f > g)$ ならば $f(x) > g(x)$ だから，$f(x) > r > g(x)$ となる有理数 $r \in \mathbb{Q}$ が存在する．一方，ある有理数 r に対して $x \in A(f > r > g)$ であれば，$f(x) > g(x)$ であるので，結局

$$A(f > g) = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \Big(A(f > r) \cap A(r > g) \Big)$$

が成り立つ．一方，各 $r \in \mathbb{Q}$ について右辺の $A(f > r) \cap A(r > g)$ は可測集合である．また，有理数は可算集合であるから，右辺，従って左辺も可測集合となる．

<u>(ii)</u>: (i) において，f と g の役割を入れ替えることにより $A(f < g)$ も可測集合であることが分かる．よって，$A(f \geq g) = A - A(f < g)$ より $A(f \geq g)$ は可測集合となる．

<u>(iii)</u>: $A(f = g) = A(f \geq g) - A(f > g)$ より $A(f = g)$ は可測集合となる．□

2 つの関数 f, g が可測集合 A 上で定義された可測函数とする．このとき，もし

$$\mu\big(A(f \neq g)\big) = 0$$

が成り立つとき，f と g は A 上で**同値** (equivalent) であるといい，

$$f \sim g \quad (A) \tag{4.1}$$

と書くことにする．

問題 4.2. (4.1) で定義される二項関係が，同値関係を満たすことを示せ．すなわち，以下，f, g, h はすべて可測集合 A 上で定義された可測関数とするとき，

(i) $f \sim f \quad (A)$

(ii) $f \sim g \quad (A) \quad \Longrightarrow \quad g \sim f \quad (A)$

(iii) $f \sim g \quad (A)$ かつ $g \sim h \quad (A) \quad \Longrightarrow \quad f \sim h \quad (A)$

を満たすことを示せ．

上の問題では，f, g ともに可測函数であることを仮定したが，もし $(X, \mathcal{A}, \mu)$ が完備な測度空間であれば，実は同値関係にある関数においては，片方が可測ならば，もう一方は自動的に可測になることが分かる：

補題 4.4. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ を完備な測度空間とし，f, g をともに可測集合 $A \in \mathcal{A}$ 上で定義された関数とする．もし f が可測函数で

$$f \sim g \quad (A)$$

を満たすならば，g も A 上可測函数となる．

Proof: $N = A(f \neq g)$ とおく．すると，仮定より $\mu(N) = 0$ である．いま，$A' = A - N$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
A(g > c) &= A'(g > c) \cup N(g > c) = A'(f > c) \cup N(g > c) \\
&= \big(A(f > c) \cap A'\big) \cup N(g > c)
\end{aligned}
$$

となる．ここで，$A(f > c)$ は可測集合である．可測集合 A と零集合 N との差集合で A' は表示されているので，測度空間 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ の完備性によって，A' は可測集合である (問題 3.15). さらに $N(g > c)$ は零集合 N の部分集合だから，これも零集合，従って可測集合である．よって，$A(g > c)$ も可測集合となる． □

(4.1) が成り立つとき，f は **μ に関して A 上ほとんど至るところ** (almost everywhere)**g に等しい**といい,『$f = g$ μ-a.e. on A』と書くこともある．一方，ある $x \in A$ に関する命題が成立しないような A の点全体の集合が零集合であるとき，その命題は **A 上ではほとんど至るところ成立する**という．この用語を用いるとすると，先の補題は次の様に言い換えることが出来る：

測度空間が完備であれば,

『g が A 上ほとんど至るところ f に等しく，f が A で可測であれば，g も A で可測である』

例題 4.2. 集合 A 上の関数 f に対して，$A(f \leq 0)$ が零集合であれば，f は A で μ に関してほとんど至るところ正であるという.

問題 4.3. A を定義域とする関数 f が次の性質を持つとするとき，f は点 x_0 で**下半連続** (lower semicontinuous at x_0) であるという：

『$f(x_0) > \lambda$ となる任意の λ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，$x \in B(x_0, \delta) \cap A$ ならば，$f(x) > \lambda$.』

また，$-f$ が点 x_0 で下半連続であるとき，f は x_0 で**上半連続** (upper semicontinuous at x_0) であるという．さて，f が可測集合 A の各点において下半連続ならば，f は A で可測となることを示せ．従って，f が A の各点において上半連続である場合も可測となる．このことも示せ.

例題 4.3. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{L})$ を考える．今 f を $\mathbb{R}$ 上で単調増加関数であるとすると，f は Borel 可測函数である． 実際，c を任意の実数とするとき，$M = \{f \geq c\}$ が Borel 可測集合であることを示そう．f は単調増加であるから，$f(x_0) \geq c$ ならば，$[x_0, \infty) \subset M$ となる．いま，$\inf\{y : f(y) \geq c\} = y_0$ とおくと，下限の定義より $M = \{f \geq c\}$ の中から点列 $\{x_n\} \subset M$ で，

$$
x_1 > x_2 > \cdots > x_n > \cdots > y_0, \quad \lim_{n \to \infty} x_n = y_0
$$

を満たすものが存在する．故に，単調増加性により，$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(y_0 + 0) \geq c$ かつ すべての $y < y_0$ について $f(y) < c$ でなければならない．従って,

$$
f(y_0) \geq c \quad \text{ならば} \quad M = [y_0, \infty),
$$

$$
f(y_0) < c \quad \text{ならば} \quad M = (y_0, \infty),
$$

のいずれかが成り立つので，M は Borel 可測集合となる． □

問題 4.4. 単調減少関数も可測函数となることを上の例題と同じような証明の仕方で示せ．

問題 4.5. * 実数値関数 f が右連続 (right continuous)，すなわち，すべての $x \in \mathbb{R}$ で，

$$f(x) = f(x+0) = \lim_{h \to 0+} f(x+h)$$

をみたすならば，f は Borel 可測函数となることを示せ．

4.2 可測関数の加減乗除

ここでは，A は可測集合とし，f, g は A 上の函数とする． このとき，実数 α, β に対して，A 上の函数 $\alpha f + \beta g, f \cdot g, f/g, |f|$ は，

$$\alpha f(x) + \beta g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad f(x)/g(x), \quad |f(x)|, \quad x \in A$$

で表される函数とする．但し，f/g は $g(x) \neq 0$ を満たす $x \in A$ でのみ定義されるものとする．

注意 4.1. f を A 上可測とするとき，$A' := A - \big(A(f = \infty) \cup A(f = -\infty)\big)$ とおくと，$c \in \mathbb{R}$ に対して

$$A(f > c) = A'(f > c) \cup A(f = +\infty)$$

より，A' において f が可測ならば A においても可測である．よって，最初から f は A で有限であるとして証明すれば十分である．

従って，以下，関数は A 上で有限であるとして話を進めていく．

補題 4.5. f, g が A で可測ならば，

(1) $\alpha f + \beta g$ は A で可測である．

(2) $f \cdot g$ は A で可測である．

(3) f/g は A で可測である．

Proof: (1): $\alpha = \beta = 0$ であれば A の各点で $\alpha f(x) + \beta g(x) = 0$ であるので明らか．よって，$\alpha \neq 0$ の場合を示せば十分である．以下，g についての場合分けで示していく：

(a) $g \equiv 1$ の場合：

- $\alpha > 0$ のときは，$A(\alpha f + \beta > c) = A\Big(f > \dfrac{c - \beta}{\alpha}\Big)$,
- $\alpha < 0$ のときは，$A(\alpha f + \beta > c) = A\Big(f < \dfrac{c - \beta}{\alpha}\Big)$,

だから $\alpha f + \beta$ は A で可測函数である．

(b) 一般の場合：

- $\alpha > 0$ のときは，$A(\alpha f + \beta g > c) = A\Big(f > -\dfrac{\beta}{\alpha} g + \dfrac{c}{\alpha}\Big)$,
- $\alpha < 0$ のときは，$A(\alpha f + \beta g > c) = A\Big(f < -\dfrac{\beta}{\alpha} g + \dfrac{c}{\alpha}\Big)$.

よって，(a) の場合と命題 4.1 により $\alpha f + \beta g$ は A 上可測であることが分かる．

(2): まず $f \cdot f$ が可測であることを示す：

- $c \geq 0$ であれば $A(f \cdot f > c) = A\big(f > \sqrt{c}\big) \cup A\big(f < -\sqrt{c}\big)$,
- $c < 0$ であれば，$A(f \cdot f > c) = A$.

よって，$f \cdot f$ は A で可測である．以下，$f \cdot f$ を f^2 と表す．

次に，$f+g, f-g$ は (1) より，ともに A 上可測であるから，今示したことから $(f+g)^2, (f-g)^2$ もともに A 上可測である．よって

$$f \cdot g = \frac{1}{4}(f+g)^2 + \Big(-\frac{1}{4}\Big)(f-g)^2$$

も再び (1) によって A 上で可測である．

(3): $f \equiv 1$ の場合：

- $c > 0$ ならば，$A(1/g > c) = A(g > 0) \cap A(g < 1/c)$,
- $c = 0$ ならば，$A(1/g > 0) = A(g > 0)$,
- $c < 0$ ならば，$A(1/g > c) = A(g < 1/c) \cup A(g > 0)$.

よって，$1/g$ は A で可測であることが分かる．すると，$f/g = f \cdot (1/g)$ は (ii) より可測であることがわかる．

□

一般に，$f_1, f_2, \ldots, f_n$ がすべて A を定義域とする関数であるとする．このとき，$x \in A$ に対して

$$\max\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}, \qquad \min\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$$

を値にとるような関数が考えられる．これらを，それぞれ $\max\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, $\min\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ と書くことにする．

命題 4.2. $f_1, f_2, \ldots, f_n$ が A 上で可測函数とすれば，$\max\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$，$\min\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ は A 上で可測函数となる．

Proof: 任意の c に対して，

$$A(\max\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} > c) = \bigcup_{k=1}^{n} A(f_k > c), \quad A(\min\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} > c) = \bigcap_{k=1}^{n} A(f_k > c)$$

が成り立ち，右辺の各集合 $A(f_k > c)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ は可測であるので $A(\max\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} > c)$, $A(\min\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} > c)$ はそれぞれ可測集合となる．

□

A 上の関数 f に対して，

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}, \quad x \in A$$

と定義する．このとき f が A 上可測であれば，上の命題により $f^{\pm}$ 共に A 上可測函数であることがわかる．また，明らかに $x \in A$ ならば，$f^+(x) \geq 0$, $f^-(x) \geq 0$ となる．また，$f(x) \geq 0$ となる $x \in A$ では，$f^+(x) = f(x)$, $f^-(x) = 0$. さらに，$f(x) \leq 0$ となる $x \in A$ に対しては，$f^+(x) = 0$, $f^-(x) = -f(x)$ となる．従って，

$$|f|(x) = |f(x)| = f^+(x) + f^-(x), \quad f(x) = f^+(x) - f^-(x), \quad x \in A$$

が成り立つことが分かる．よって，この等式により $f^{\pm}$ が A 上で可測であれば，f 及び $|f|$ も可測であることが分かる．よって，まとめると次の命題が成り立つ：

命題 4.3. (1) f が A 上で可測であるための必要十分条件は f^+ 及び f^- がともに A 上で可測であることである．

(2) f が A 上可測であれば，$|f|$ は A 上で可測である．

4.3 可測函数列

$\{f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots\}$ を，可測集合 A を定義域とする関数の集合列とする．このとき，各 $x \in A$ に対して，実数列 $\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots\}$ を考えることが出来る．このとき，この集合の上限及び下限を，それぞれ $\sup_n f_n(x)$, $\inf_n f_n(x)$ とおく：

$$\sup_n f_n(x) := \sup\{f_n(x) : n = 1, 2, \ldots\}, \quad \inf_n f_n(x) := \inf\{f_n(x) : n = 1, 2, \ldots\}.$$

そうして，$x \in A$ に対して，$\sup_n f_n(x)$, $\inf_n f_n(x)$ を対応させる関数 $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$ を考えることが出来る．

命題 4.4. A を定義域とする関数の集合列 $\{f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots\}$ を考えるとき，各関数 f_n が可測であれば，$\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$ も A 上で可測函数となる．

Proof: 任意の実数 c に対して $A(\sup_n f_n > c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(f_n > c)$ が成り立つことが分かるので $\sup_n f_n$ は可測であることがわかる．同様に $A(\inf_n f_n < c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(f_n < c)$ より，$\inf_n f_n$ も可測である． □

次に，各 $x \in A$ について，数列 $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ の上極限及び下極限を与える関数を考えることが出来る．そこで，それぞれの関数を**上極限 (関数)**, **下極限 (関数)** といい，$\limsup_{n\to\infty} f_n$, $\liminf_{n\to\infty} f_n$ と表す．特に，各点 $x \in A$ において

$$\limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

であるときは，

$$\lim_{n\to\infty} f_n := \limsup_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n$$

とおいて，これを，関数列 $\{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$ の**極限関数**という．

命題 4.5. 各 f_n $(n \in \mathbb{N})$ が A 上で可測函数ならば，$\limsup_{n\to\infty} f_n$, $\liminf_{n\to\infty} f_n$ は A において可測である．従って，$\lim_{n\to\infty} f_n$ が存在する場合には $\lim_{n\to\infty} f_n$ も A 上で可測となる．

Proof: 各 n について

$$\begin{cases} \overline{f_n} & := & \sup_p f_{n+p} := \sup\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \ldots, f_{n+p}, \ldots\}, \\ \underline{f_n} & := & \inf_p f_{n+p} := \inf\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \ldots, f_{n+p}, \ldots\}, \end{cases}$$

とおくと，$\overline{f_n}, \underline{f_n}$ は先の命題により A 上可測となる．一方，第二章の最後の節における**数列の極限値**で見たように

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_n \overline{f_n}, \quad \liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_n \underline{f_n}$$

であることから，再び前の命題から $\limsup_{n\to\infty} f_n$, $\liminf_{n\to\infty} f_n$ はともに A 上可測であることがわかる．□

4.4 単函数（または階段函数）

f が A を定義域とする関数で，値域 $f(A) = \{y \in \mathbb{R} : \ y = f(x), \ x \in A\}$ が有限集合であるとき，f を A 上の**単函数** (simple function, あるいは**階段函数**; step function) という．明らかに，定数関数は単函数である．

補題 4.6. f が A 上の単函数で，その値域を $f(A) = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ とする．このとき，f が A 上で ($\mathcal{A}$-) 可測であるための必要十分条件は，任意の $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して $A_k := A(f = c_k)$ が可測集合であることである．

Proof: $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$ であると仮定する．(1) (必要性) f が A 上可測ならば，補題 4.3 により $A(f = c)$ は可測集合である．

(2) (十分性) 各 $k = 1, 2, \ldots, n$ について $A_k = A(f = c_k)$ が可測集合とする．このとき，$c < c_1$ ならば，$A(f > c) = A$. また，$c_n \leq c$ ならば $A(f > c) = \emptyset$. また，$c_{k-1} \leq c < c_k$ $(k = 2, \ldots, n)$ ならば，$A(f > c) = A_k \cup A_{k+1} \cup \cdots \cup A_n$. よって，いずれにしても $A(f > c)$ は可測である．□

A を定義域とする関数 f が，A のどの点 x をとっても $f(x) \geq 0$ を満たすとき，f は A 上の**非負値関数** (non-negative function)，または**正値関数** (positive function) と言い，このことを $f \geq 0$ と表す．また，関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} := \{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$ があるとし，もし，$f_n \leq f_{n+1}$，すなわち，A の各点 x で

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x), \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

ならば，関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を**増加関数列**または**単調増加関数列**という．また，$\{-f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が増加関数列となるとき，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を**減少関数列**，または**単調減少関数列**という．次の補題は，(Lebesgue 式の) 積分を考える際に鍵となるものである．

定理 4.1. f を A 上の非負値可測函数とする．このとき，次の条件を満たす増加関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する：

(1) 各 $n \in \mathbb{N}$ について，f_n は可測な正値単函数，

(2) $f_1 \leq \cdots \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \cdots \leq f$ であり，かつ $\lim_{n\to\infty} f_n = f$.

Proof: 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，f_n を次のように定義すればよい：

$$f_n(x) := \begin{cases} (k-1)\cdot 2^{-n}, & x \in A\big((k-1)\cdot 2^{-n} \leq f < k\cdot 2^{-n}\big),\ k = 1,2,\ldots,n\cdot 2^n, \\ \\ n, & x \in A(f \geq n). \end{cases} \tag{4.2}$$

明らかに $\{f_n\}$ は増加函数列である（次の**問題**をみよ）． また，収束性については次のように示される．$f(x) < \infty$ であれば，$f(x) < n$ となるとき，$0 \leq f(x) - f_n(x) \leq 2^{-n}$ であるから，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ となる．また，$f(x) = +\infty$ ならば，$f_n(x) = n$ であるので，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \infty$ となる．よって，すべての点 $x \in A$ で，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ となる． □

問題 4.6. 上の定理で構成した函数列 $\{f_n\}$ が単調増加列になっていることを正確に示せ.

問題 4.7. 上の定理において，$f(x)$ が実数値の有界な可測函数とすれば，$\{f_n\}$ は A 上で一様に収束することを示せ.

問題 4.8. f_1 と f_2 を共に単函数とすると，$f_1 \vee f_2$, $f_1 \wedge f_2$ で定義される関数も単函数となる事を示せ.

今示した定理において，非負値可測函数に対しては，その関数に収束する単関数の近似列 $\{f_n\}$ を構成できることを述べたが，単函数を具体的に表示するために集合の**指示関数** (indicator function, あるいは**特性関数** (characteristic function) とか**定義関数**などとも呼ばれる[2]) というものを改めて導入する: A を任意の集合とするとき，A の指示関数 I_A (あるいは 1_A と表すこともある) を次のように定義する：

$$I_A(x) = \Big(1_A(x) =\Big) \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A, \\ 0 & \text{if } x \notin A. \end{cases}$$

このように定義すると，定理 4.1 における近似列 f_n は次のように表記できる：

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n\cdot 2^n} (k-1)2^{-n} I_{A(k,n)}(x) + n I_{A(n)}(x), \quad x \in X.$$

但し，$A(k,n) = A((k-1)2^{-n} \leq f < k\cdot 2^{-n})$, $A(n) = A(f \geq n)$ である.

集合 A が与えられれば，その指示関数 I_A が $\{0,1\}$ に値をとる関数として定義されるが，逆に $f(X) = \{0,1\}$ となるような単函数 f が与えられれば，f を指示関数とするような集合 $A = A(f=1)$ が定まる．特に A が可測集合であれば，その指示関数 I_A は可測函数となり，また指示関数 I_A が 可測函数ならば，A は可測集合となる.

問題 4.9. 上のことを証明せ.

[2]**注意** 確率論や統計学において "特性関数" という言葉は全く別の意味で使うので，ここでは専ら**指示関数**という言葉を使うことにする

Chapter 5

Lebesgue積分

ここまでくると，Lebesgue 積分を定義するのは非常に簡単である．$(X, \mathcal{A}, \mu)$ を測度空間とし，A を $\mathcal{A}$-可測集合とする．まず，X 上で定義された $\mathcal{A}$-可測函数 f に対して $f = f^+ - f^-$ と正の部分と負の部分に分けて考えて，$f^\pm$ それぞれの積分 $\int_X f^+ d\mu, \int_X f^- d\mu$ が定義できれば，f の積分として $\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$ として定義すればよいので，ここでは始めから $f \geq 0$ として考える．

さらに，$f \geq 0$ であれば，f に収束するような単函数の増加関数列 $\{f_n\}$ が存在する．従って，もし f_n の定義を簡単に行うことができれば，$\int_X f_n d\mu$ の実数列としての極限を考え，さらに，f を近似するいろいろな単函数による近似列の積分の上限で f の積分 $\int_X f d\mu$ を定義する．実際，そうすることで積分が 'well-defined' となる．以下，このことを実行し検証する．

5.1 非負値可測単函数及び非負値可測函数の積分

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ を測度空間とし，しばらく固定する．また，f を X 上の非負値可測な単函数とする．すなわち，

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k I_{A_k}(x), \quad x \in X \tag{5.1}$$

と表されているものとする．但し，各 $k = 1, 2, \ldots, n$ に対し，$0 \leq \alpha_i < \infty$ であり，

$$f(X) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}, \quad A_k = X(f = \alpha_k) = \{x \in X :\ f(x) = \alpha_k\}, \quad X = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

を満たすものとする．このとき，f の $\boldsymbol{\mu}$ **に関する Lebesgue 積分** (Lebesgue integral of f with respect to μ) を

$$\int_X f d\mu := \int_X f(x)\mu(dx) := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(A_k) \tag{5.2}$$

で定義する．ここで，$0 \cdot \infty = 0$ と規約していることを思い出してほしい．

以下，$\mathsf{SF}_+ := \mathsf{SF}_+(X)$ でもって，X 上の非負値の可測な単函数全体を表すことにする．

命題 5.1. $f, g \in \mathsf{SF}_+$ とする．このとき，次が成立する．

(1) $c \geq 0$ に対して，$\displaystyle\int_X cf(x)\mu(dx) = c\int_X f(x)\mu(dx)$.

(2) $\displaystyle\int_X \bigl(f(x)+g(x)\bigr)\mu(dx) = \int_X f(x)\mu(dx) + \int_X g(x)\mu(dx)$

(3) $f \leq g$ ならば，$\displaystyle\int_X f(x)\mu(dx) \leq \int_X g(x)\mu(dx)$

Proof: (1) は定義式 (5.2) より明らかである．(2), (3) を示すために，まず f, g の値域をそれぞれ，$f(X) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, $g(X) = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\}$ とおく．f, g ともに SF_+ の元であるので，$\alpha_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $\beta_j \geq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$. ここで，$E_i = X(f = \alpha_i)$, $F_j = X(g = \beta_j)$ とおくと，

$$X = \bigcup_{i=1}^n E_i = \bigcup_{j=1}^k F_j, \quad i \neq i' \implies E_i \cap E_{i'} = \varnothing, \quad j \neq j' \implies F_j \cap F_{j'} = \varnothing.$$

また，$E_i = \bigcup_{j=1}^k (E_i \cap F_j)$, $F_j = \bigcup_{i=1}^n (E_i \cap F_j)$ が成り立つので，

$$I_{E_i}(x) = \sum_{j=1}^k I_{E_i \cap F_j}(x), \quad I_{F_j}(x) = \sum_{i=1}^n I_{E_i \cap F_j}(x)$$

を得る．よって，

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i I_{E_i}(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \alpha_i I_{E_i \cap F_j}(x), \quad g(x) = \sum_{j=1}^k \beta_j I_{F_j}(x) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \beta_j I_{E_i \cap F_j}(x)$$

より，

$$f(x) + g(x) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_j) I_{E_i \cap F_j}(x)$$

を得る．従って，単函数の積分の定義 (5.2) 及び測度の性質 (m2) により，

$$\begin{aligned}
\int_X \bigl(f(x)+g(x)\bigr)\mu(dx) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (\alpha_i + \beta_j)\mu(E_i \cap F_j) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \alpha_i \mu(E_i \cap F_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \beta_j \mu(E_i \cap F_j) \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^k \mu(E_i \cap F_j) + \sum_{j=1}^k \beta_j \sum_{i=1}^n \mu(E_i \cap F_j) \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i) + \sum_{j=1}^k \beta_j \mu(F_j) \\
&= \int_X f(x)\mu(dx) + \int_X g(x)\mu(dx).
\end{aligned}$$

よって，(2) が成り立つことが分かる．

次に，$f \leq g$ を仮定すると，各点 x について $f(x) \leq g(x)$ であるから，特に $x \in E_i \cap F_j$ とすると $\alpha_i = f(x) \leq g(x) = \beta_j$ となる．よって，

$$\int_A f(x)\mu(dx) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \alpha_i \mu(E_i \cap F_j) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \beta_j \mu(E_i \cap F_j) = \int_X g(x)\mu(dx)$$

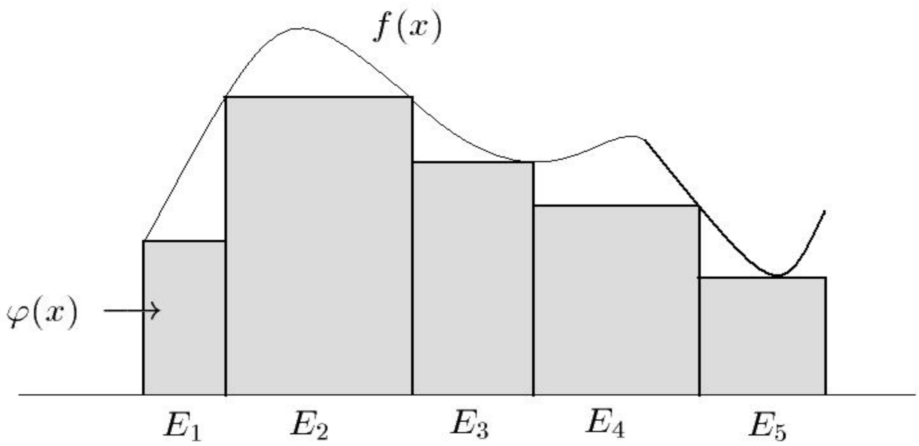
となり，(3) が示された． □

以下，非負値可測函数全体を $\mathsf{MF}_+ := \mathsf{MF}_+(X)$ で表すことにする．

定義 5.1. $f \in \mathsf{MF}_+$ に対して

$$\int_X f d\mu := \int_X f(x)\mu(dx) := \sup\Big\{\int_X \varphi(x)\mu(dx) : \ 0 \leq \varphi \leq f, \ \varphi \in \mathsf{SF}_+\Big\}$$

により f の **μ に関する Lebesgue 積分**を定義することにする．ここで，右辺の sup は，$0 \leq \varphi \leq f$ を満たすすべての可測な単函数 $\varphi \in \mathsf{SF}_+$ にわたってとるものとする．



命題 5.2. $f \in \mathsf{SF}_+$ に対しては，

$$\int_X f(x)\mu(dx) = \sup\Big\{\int_X \varphi(x)\mu(dx) : \ 0 \leq \varphi \leq f, \ \varphi \in \mathrm{SF}_+\Big\} \tag{5.3}$$

が成り立つ．ただし，$f \in \mathsf{SF}_+$ に対しての $\int_X f d\mu$ は (5.2) で与えられている．

Proof: (5.3) の右辺で $f = \varphi$ とおくと，$f \in \mathsf{SF}_+$ であるので，

$$\sup\Big\{\int_X \varphi(x)\mu(dx) : \ 0 \leq \varphi \leq f, \ \varphi \in \mathsf{SF}_+\Big\} \geq \int_X f d\mu$$

が成り立つことが分かる．一方，$0 \leq \varphi \leq f$ ならば，命題 5.1(3) より

$$\int_X \varphi \, d\mu \leq \int_X f d\mu$$

が成り立つ．よって，

$$\sup\Big\{\int_X \varphi(x)\mu(dx) :\ 0 \le \varphi \le f,\ \varphi \in \mathsf{SF}_+\Big\} \le \int_X f d\mu.$$

故に (5.3) が成り立つ． □

さて，A を可測集合とし，$f \in \mathsf{MF}_+$ をとる．このとき，$f \cdot I_A$ も非負値可測函数となる．このとき，

$$\int_A f d\mu := \int_A f(x)\mu(dx) := \int_X f(x) \cdot I_A(x)\mu(dx) \tag{5.4}$$

と定義し，これを $\boldsymbol{A}$ **上の** $\boldsymbol{f}$ **の積分**と言うことにする．

補題 5.1. $x \in A$ に対して $f(x) = c$ とすれば，$\int_A f d\mu = c \cdot \mu(A)$ が成り立つ．特に $x \in A$ に対して $f(x) = 0$ ならば $\int_A f d\mu = 0$ となる．

Proof: f は次のような形で表される単函数と見なすことが出来る：

$$f = c \cdot I_A + 0 \cdot I_{A^c}$$

従って，この場合の f の積分は

$$\int_X f d\mu = \int_A f d\mu = c \cdot \mu(A) + 0 \cdot \mu(A^c) = c \cdot \mu(A)$$

である．特に $x \in A$ に対し $f(x) = 0$ ならば，上の f については $c = 0$ と見なせるから，$\int_A f d\mu = 0 \cdot \mu(A) = 0$ となる． □

補題 5.2. $f \in \mathsf{SF}_+$ とする．このとき，$A \in \mathcal{A}$ に対して，

$$\nu(A) := \int_A f(x)m(dx)$$

とおくと，ν は $(X, \mathcal{A})$ 上の測度となる．

Proof: ν が $\mathcal{A}$ 上で次の性質を持つこと示せばよい：

(m1) $\nu(\varnothing) = 0$

(m2) $A_n \in \mathcal{A}$ に対して，A_n が互いに素，すなわち，$i \neq j$ のとき，$A_i \cap A_j = \varnothing$ であれば，

$$\nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).$$

しかし，(m1) は明らかに成り立つので，(m2) を示せば十分である． そこで，$\{A_n\}$ を互いに素な可測な集合列とする．$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とおく．$f \in \mathsf{SF}_+$ より，

$$f = \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k I_{B_k}$$

書ける．但し，$\alpha_k \geq 0,\ X = \bigcup_{k=1}^{\ell} B_k$ であり，$k \neq k'$ ならば，$B_k \cap B_{k'} = \varnothing$ を満たしている．すると，定義式により

$$\nu(A) = \int_A f d\mu = \int_X f I_A d\mu = \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k\, \mu(A \cap B_k), \quad \nu(A_n) = \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k \mu(A_n \cap B_k)$$

となる．ところで 集合の和に関する結合法則から，k をとめるごとに

$$A \cap B_k = \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \cap B_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B_k)$$

となる．また固定した k に対して，$\{A_n \cap B_k\}_{n=1}^{\infty}$ は互いに素であるから測度 μ に対する (m2) の性質により，

$$\mu(A \cap B_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap B_k)$$

が成り立つ．よって，

$$\nu(A) = \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k\, \mu(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap B_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k \mu(A_n \cap B_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).$$

よって，ν は $\mathcal{A}$ 上の測度となることが分かった． □

そこで，$f \in \mathsf{SF}_+$ を固定して，測度

$$\nu(E) := \int_E f(x)\mu(dx), \quad E \in \mathcal{A}$$

を考える．この ν を用いて， $g \in \mathsf{SF}_+$ の ν による Lebesgue 積分を μ の場合とまったく同様に定義する：

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\nu(dx) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nu(A_i)\ \Big(= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \alpha_i \beta_j \mu(A_i \cap E_j)\Big).$$

但し，

$$g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i I_{A_i}, \quad i \neq i' \implies A_i \cap A_{i'} = \varnothing, \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$$

であり，また

$$f = \sum_{j=1}^{k} \beta_j I_{E_j}, \quad j \neq j' \implies E_j \cap E_{j'} = \varnothing, \quad \bigcup_{j=1}^{k} E_j = X$$

に注意しておく．そうして一般の $h \in \mathsf{MF}_+$ に対して，ν による積分は

$$\int_X h d\nu := \int_X h(x)\nu(dx) := \sup\Big\{\int_X \varphi(x)\nu(dx) :\ 0 \leq \varphi \leq h,\ \varphi \in \mathsf{SF}_+\Big\}$$

として定義される．

さて，命題 5.1 に対応する性質が，MF_+ に対しても成立することを示しておこう．

命題 5.3. 次の問に答えよ．$f, g \in \mathsf{MF}_+$ に対して，次が成立する：

(1) $f \leq g$ ならば，$\displaystyle\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$

(2) c を非負定数とすれば，$\displaystyle\int_X cf d\mu = c\int_X f d\mu.$

Proof: (1): $\varphi \in \mathsf{SF}_+$ を $0 \leq \varphi \leq f$ を満たすようにとる．$f \leq g$ より，$0 \leq \varphi \leq g$. よって，g の積分の定義によると

$$\int_X \varphi(x)\mu(dx) \leq \int_X g(x)\mu(dx).$$

左辺において，$0 \leq \varphi \leq f$ を満たす $\varphi \in \mathrm{SF}_+$ について上限をとると，

$$\int_X f(x)\mu(dx) \leq \int_X g(x)\mu(dx)$$

となるので，これにより (1) が従う．

(2): $c = 0$ ならば，明らかなので $c > 0$ とする．上限の定義により，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\varphi \in \mathsf{SF}_+$ を $0 \leq \varphi \leq f$ かつ

$$\int_X f d\mu - \varepsilon < \int_X \varphi d\mu$$

を満たすようにとる．単函数に関しては，命題 5.1(1) から

$$c\int_X f d\mu - c\varepsilon < c\int_X \varphi d\mu = \int_X c\varphi d\mu$$

となる．ここで，$c\varphi$ は再び SF_+ の要素で，$0 \leq c\varphi \leq cf$ であるので，$\int_X c\varphi d\mu \leq \int_X cf d\mu$.
よって，

$$c\int_X f d\mu - c\varepsilon < \int_X cf d\mu.$$

$\varepsilon > 0$ は任意であるので，$\varepsilon \to 0$ として，

$$c\int_X f d\mu \leq \int_X cf d\mu$$

を得る．一方，$cf \in \mathsf{MF}_+$ であるので，今示したことから，

$$\frac{1}{c}\int_X cf d\mu \leq \int_X \frac{1}{c} cf d\mu = \int_X f d\mu.$$

よって，

$$\int_X cf d\mu \leq c\int_X f d\mu.$$

故に $\int_X cf d\mu = c\int_X f d\mu$ が示された． □

補題 5.3. (1) $f \in \mathsf{MF}_+$ に対して，$A, B \in \mathcal{A}$ が $A \subset B$ を満たせば，

$$\int_A f(x)\mu(dx) \leq \int_B f(x)\mu(dx)$$

が成り立つ．

(2) $f, g \in \mathsf{MF}_+,\ A \in \mathcal{A}$ に対して，$f(x) \leq g(x),\ x \in A$ が成り立つとすると，

$$\int_A f(x)\mu(dx) \leq \int_A g(x)\mu(dx)$$

となる．

Proof: (1) $f_1 = f \cdot I_A,\ f_2 = f \cdot I_B$ とおけば，$f_1, f_2 \in \mathsf{MF}_+$ であり，さらに $A \subset B$ より $f_1 \leq f_2$ となる．よって，命題 5.3(1) により

$$\int_A f(x)\mu(dx) = \int_X f(x)I_A(x)\mu(dx) \leq \int_X f(x)I_B(x)\mu(dx) \int_B f(x)\mu(dx).$$

(2) $f_1 = f \cdot I_A,\ f_2 = g \cdot I_B$ とおけば，$f_1, f_2 \in \mathsf{MF}_+$ であり，$x \in A$ ならば，$f_1(x) = f(x) \leq g(x) = f_2(x)$．$x \in X - A$ ならば，$f_1(x) = 0 = f_2(x)$ であるから，すべての $x \in X$ に対して，$f_1(x) \leq f_2(x)$ となる．よって，再び，命題 5.3(1) により

$$\int_A f(x)\mu(dx) = \int_X f_1(x)\mu(dx) \leq \int_X f_2(x)\mu(dx) = \int_A g(x)\mu(dx).$$

□

命題 5.4. $f \in \mathsf{MF}_+$ 及び $A \in \mathcal{A}$ に対して $\int_A f(x)\mu(dx) = 0$ であれば，$\mu\big(A(f \neq 0)\big) = 0$，すなわち，

$$f = 0 \quad \mu\text{-}a.e. \ \text{ on } A$$

が成り立つ．

Proof: $n \in \mathbb{N}$ に対して，$A_n := A(f > 1/n)$ とおくと，$A(f > 0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ である．また，$A_n \subset A_{n+1}$ であるから

$$\mu(A(f > 0)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

一方，$A_n \subset A$ であり，また $f \cdot I_{A_n} \geq \frac{1}{n} \cdot I_{A_n}$ より，今示した補題 5.3(1) 及び命題 5.3(1) により

$$0 = \int_A f(x)\mu(dx) \geq \int_{A_n} f(x)\mu(dx) \geq \frac{1}{n}\mu(A_n).$$

従って，$\mu(A_n) = 0,\ n = 1, 2, \ldots$ これより $\mu(A(f > 0)) = 0$ がわかる． □

さて，次は積分の理論を構築する上で基礎となる重要な定理の一つである．

定理 5.1. (単調収束定理: monotone convergence theorem, MCT)
$\{f_n\} \subset \mathsf{MF}_+$ を可測な単調増加関数列とする．すなわち，

$$0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \le f_n(x) \le \cdots, \quad x \in X$$

とし，さらに $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ とおく．このとき，$f \in \mathsf{MF}_+$ かつ

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\mu(dx) = \int_X f(x)\mu(dx) \tag{5.5}$$

が成立する．

Proof: 各 $x \in X$ において $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加数列であるので，拡張された実数 $\overline{\mathbb{R}}$ において極限が存在する：

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

各 f_n は X 上の可測函数であるから，命題 4.5 より，極限関数 f も X 上の可測函数であることが分かる．また，明らかに $f \ge f_n \ge 0$ であるので，$f \in \mathsf{MF}_+$ となる．よって，命題 5.3(1) より

$$\int_X f_n(x)\mu(dx) \le \int_X f(x)\mu(dx), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

従って，

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\mu(dx) \le \int_X f(x)\mu(dx)$$

が成立する．よって，後は

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\mu(dx) \ge \int_X f(x)\mu(dx) \tag{5.6}$$

が示されれば証明は終わることになる．以下 (5.6) が成立することを示そう．そのために，

$$N = \{x \in X : \ f(x) = 0\}$$

とおく． また，$f \in \mathsf{MF}_+$ であることから，任意の $0 < c < 1$ 及び $0 \le \varphi \le f$ を満たす任意の $\varphi \in \mathsf{SF}_+$ に対して，

$$A_n := \big\{x \in X - N : \ f_n(x) > c\varphi(x)\big\}$$

とおく．f_n 及び $c\varphi$ は可測函数なので，命題 4.1 より，$A_n \in \mathcal{A}$ がわかる．また，f_n は単調増加で，$f = \lim f_n$ であることから，

$$A_n \subset A_{n+1}, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X - N.$$

が成り立つ. 実際, 始めの包含関係は明らかであるので, 二番目の等号を示す. そこで, $x \in X - N$ を任意にとる．$f(x) > 0$ かつ $f(x) \ge \varphi(x) \ge 0$ であるから，もし $\varphi(x) = 0$ であれば，$f(x) > 0 = \varphi(x) = c\varphi(x)$ であり，また $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ だから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，あ

る番号 $n_0 = n(x) \in \mathbb{N}$ が存在して，$|f(x) - f_{n_0}(x)| < \varepsilon$ を満たす．そこで，$\varepsilon = f(x)/2 > 0$ とおくと，

$$f_{n_0}(x) > f(x)/2 > 0 = c\varphi(x)$$

となることがわかる．すなわち，$x \in A_{n_0}$．従って，$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$．次に，$\varphi(x) > 0$ であれば，$0 < c < 1$ より

$$f(x) \geq \varphi(x) > c\varphi(x)$$

となるから，再び $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ に注意すると，適当な $n_1 \in \mathbb{N}$ が存在して，

$$f_{n_1}(x) > c\varphi(x)$$

を満たすようにできる． すなわち，$x \in A_{n_1}$，従って $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ となることがわかる．

任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して，

$$\nu(A) := \int_A \varphi(x) \cdot 1_{X-N}(x)\mu(dx) = \int_X \varphi(x) \cdot 1_{A\cap(X-N)}(x)\mu(dx)$$

とおくと，ν は補題 5.2 より $\mathcal{A}$ 上の測度である．今，$f_n \cdot 1_{X-N} \geq f_n \cdot I_{A_n} \geq c \cdot \varphi \cdot I_{A_n}$ 及び $A_n \subset X - N$ に注意すると，命題 5.3(1) より

$$\int_{X-N} f_n(x)\mu(dx) \geq \int_X f_n(x) I_{A_n}(x)\mu(dx) \geq \int_X c\varphi(x) I_{A_n}(x)\mu(dx) = c\int_{A_n} \varphi(x)\mu(dx) = c\,\nu(A_n).$$

ところで，各 n について $A_n \subset A_{n+1}$ が成立していることと，両辺 n に関する下限をとり，同時に測度 ν に対する定理 3.4 を用いると

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{X-N} f_n(x)\mu(dx) \geq c \lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = c\nu(X-N) = c\int_X \varphi(x) \cdot 1_{X-N}(x)\mu(dx).$$

ここで，$c \in (0,1)$ は任意だったので，$c \to 1$ として

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{X-N} f_n(x)\mu(dx) \geq \int_X \varphi(x) \cdot 1_{X-N}(x)\mu(dx) = \int_{X-N} \varphi(x)\mu(dx). \tag{5.7}$$

ところで，N 上では，$f(x) = 0$ より，$f_n(x) = \varphi(x) = 0$ となる．従って，

$$\int_N f_n(x)\mu(dx) = \int_N \varphi(x)\mu(dx) = 0$$

となるから，

$$\int_{X-N} f_n(x)\mu(dx) = \int_X f_n(x)\mu(x),\ \int_{X-N} \varphi(x)\mu(dx) = \int_X \varphi(x)\mu(dx)$$

となる．よって，(5.7) は

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\mu(dx) \geq \int_X \varphi(x)\mu(dx)$$

となることがわかる． そこで，最後に $\varphi \in \mathsf{SF}_+$ も $0 \leq \varphi \leq f$ に対する上限をとると，

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\mu(dx) \geq \int_X f(x)\mu(dx)$$

が成り立ち，定理の証明が終わる． □

さて，これから単調収束定理を使って項別積分に関する定理を証明する．

定理 5.2. (項別積分: Termwise integration) $f_n \in \mathsf{MF}_+$ とし，$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ とおく． このとき，$f \in \mathsf{MF}_+$ かつ

$$\int_X f(x)\mu(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n(x)\mu(dx)$$

が成り立つ．

Proof: $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \lim_{n\to\infty}(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)$ より，f が可測であることがわかる．

まず $n \geq 3$ に対して $f_n = 0$ の場合，つまり f_1, f_2 に対して

$$\int_X (f_1(x) + f_2(x))\mu(dx) = \int_X f_1(x)\mu(dx) + \int_X f_2(x)\mu(dx) \tag{5.8}$$

が成り立つことを示そう．そのために，f_1, f_2 それぞれに対して，(4.2) で定義される単函数を $\varphi_n, \phi_k \in \mathsf{SF}_+$ を定義すると，

$$0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \cdots \leq \varphi_n \leq \cdots \leq f_1, \quad \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n(x)\mu(dx) = \int_X f_1(x)\mu(dx),$$
$$0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \cdots \leq \phi_n \leq \cdots \leq f_2, \quad \lim_{n\to\infty} \int_X \phi_n(x)\mu(dx) = \int_X f_2(x)\mu(dx)$$

かつ

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = f_1, \quad \lim_{n\to\infty} \phi_n = f_2$$

と出来る．すると，

$$0 \leq \varphi_n + \phi_n \leq \varphi_{n+1} + \phi_{n+1}, \quad \lim_{n\to\infty}(\varphi_n + \phi_n) = f_1 + f_2$$

となるので，単調収束定理 (MCT) により

$$\begin{aligned}
\int_X (f_1(x) + f_2(x))\mu(dx) &= \lim_{n\to\infty} \int_X (\varphi_n(x) + \phi_n(x))\mu(dx) \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big(\int_X \varphi_n(x)\mu(dx) + \int_X \phi_n(x))\mu(dx) \Big) \\
&= \int_X f_1(x)\mu(dx) + \int_X f_2(x)\mu(dx)
\end{aligned}$$

となり，(5.8) が示された．したがって，数学的帰納法により $n = N$ に対しても成立することが分かる．

これをもとに一般の場合を示す．そこで，各 $N \in \mathbb{N}$ に対して $F_N = \sum_{j=1}^{N} f_j$ とおくと，$f_j \geq 0$ 及び補題 4.5 により，$F_N \in \mathsf{MF}_+$ かつ $0 \leq F_1 \leq F_2 \leq \cdots \leq F_N \leq \cdots$ であることがわかる．よって，命題 4.5 より $f = \lim_{N\to\infty} F_N \in \mathsf{MF}_+$ であり，さらに単調収束定理および (5.8) より

$$\begin{aligned}
\int_X f(x)\mu(dx) &= \lim_{N\to\infty} \int_X F_N(x)\mu(dx) = \lim_{N\to\infty} \int_X \sum_{j=1}^{N} f_j(x)\mu(dx) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \int_X f_j(x)\mu(dx) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f_j(x)\mu(dx).
\end{aligned}$$

よって，定理が示された． □

さて，項別積分の定理の系として，次が得られる．

系 5.1. $f \in \mathsf{MF}_+$ に対して，$\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ を互いに素な可測集合列とするとき，$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ として，

$$\int_A f(x)\mu(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x)\mu(dx)$$

が成り立つ．

Proof: $\{A_n\}$ は互いに素であるので，

$$I_A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{A_n}(x), \quad x \in X \tag{5.9}$$

が成り立つ．よって，$f \cdot I_A = \sum_{n=1}^{\infty} f \cdot I_{A_n}$ に対して項別積分の定理及び定義式 (5.4) により

$$\begin{aligned} \int_A f(x)\mu(dx) &= \int_X f(x) \cdot I_A(x)\mu(dx) = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f(x) \cdot I_{A_n}(x)\mu(dx) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f(x) \cdot I_{A_n}(x)\mu(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x)\mu(dx). \end{aligned}$$

□

問題 5.1. $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ を互いに素な可測集合列とするとき，等式 (5.9) が成り立つことを示せ．

5.2 積分可能な可測函数

f を X 上の可測函数とし，必ずしも正値とは限らないものとする．このような可測函数の積分を定義する．そのために，f を $f = f^+ - f^-$ と，正の部分と負の部分に分解する (命題 4.3 の直前を見よ)：

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}, \quad x \in X.$$

すると，f が可測であることと f^+, f^- がともに可測であることが同値であった．従って，f^+, $f^- \in \mathsf{MF}_+$ であることがわかる．そこで， 次の二つの正値関数の積分

$$\int_X f^+(x)\mu(dx), \qquad \int_X f^-(x)\mu(dx) \tag{5.10}$$

のうち，少なくとも一つが有限であるとき，

$$\int_X f(x)\mu(dx) := \int_X f^+(x)\mu(dx) - \int_X f^-(x)\mu(dx) \tag{5.11}$$

とおいて，この左辺を f の $\boldsymbol{\mu}$ **に関する Lebesgue 積分**ということにする．このとき，f は**積分確定**という．特に (5.10) の二つの積分がともに有限であるとき，f は (Lebesgue) **積分可能** (integrable)(あるいは，**可積分**) であるという．

注意 5.1. (5.10) の二つの積分がともに $+\infty$ であるときは，(5.11) の右辺は $+\infty-(+\infty)$ となり，以前注意したように (注意 2.4 を参照) 意味を持たない．従って，このときは f は積分を持たないと考える．

なお，f 自身が正値な可測函数の場合は，$f^+ = f,\ f^- = 0$. よって，

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu, \quad \int_X f^- d\mu = 0$$

であるので，定義 (5.11) はこれまでの $\int_X f d\mu$ と同じになり，これまでの議論に帰着される．

これまで示してきた正値函数に対する積分の性質のいくつかが，一般の可積分な可測函数に対しても成立するので，それをいくつか述べる．

補題 5.4. f, g をともに可積分な可測函数とし，$f \leq g$ ならば，

$$\int_X f(x)\mu(dx) \leq \int_X g(x)\mu(dx)$$

が成り立つ．

問題 5.2. 上の補題を証明せよ．

問題 5.3. 可測函数 f が μ に関して積分可能であるための必要十分条件は $|f|$ が μ に関して積分可能なることを示せ．

注意 5.2. 上の問題における主張は重要である． $([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \mathcal{L})$ において，次のような例を考えよう：

$$f(x) = \begin{cases} 1, & a \leq x \leq b \text{ かつ } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & a \leq x \leq b \text{ かつ } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

とおくと，f は $[a,b]$ 上 Borel-可測函数であり，しかも $|f|$ は至るところ 1 となるので，$|f|$ は $[a,b]$ において Lebesgue の意味でも Riemann の意味でも積分可能である．よって，上の問題より f はその上で Lebesgue 積分可能である．ところで，f は Riemann 積分可能でないことはその上の Darboux の上積分と下積分の値が異なることから示される．すなわち，Lebesgue 積分とは異なり，$|f|$ が Riemann 積分可能であっても f が Riemann 積分可能でないことがあり得るのである．

□

さて，以下 μ に関して (Lebesgue) 可積分な可測函数全体を $\mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$ で表す．すなわち，

$$\mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu) := \left\{ f : X \to \overline{\mathbb{R}} \;\middle|\; f \text{ は } \mathcal{A}\text{-可測函数で } \int_X |f(x)|\,\mu(dx) < \infty \right\}$$

とおく．以下は $\mathcal{A}$-可測な関数しか考えないので，簡単のため，$\mathcal{L}(X,\mu) := \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$ と書き表すこともある．

注意 5.3. ここでは，実数に値を取る関数しか考えないが，場合によっては（X を定義域とし）複素数値を取る関数を考えることもあり，さらにその積分も扱うこともある．その場合は，f をそのような関数とするとき，$f = g + ih$ と実数部分と虚数部分に分けて考える．ただし，g, h

は実数に値を取る可測函数である．さらに，g, h がともに μ に関して可積分な函数のとき，f の積分を

$$\int_X f(x)\mu(dx) := \int_X g(x)\mu(dx) + i\int_X h(x)\mu(dx)$$

で定義する．従って，以下 $\mathbb{R}$ に値を取る関数に限って話を進めれば，複素数値関数にも議論を適用することが可能となることがわかる．

補題 5.5. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ を互いに素な可測集合列とする．また，各 A_k 上で f が可積分とすると，f は $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$ 上でも可積分であり，

$$\int_A f(x)\mu(dx) = \sum_{k=1}^n \int_{A_k} f(x)\mu(dx)$$

が成り立つ．

Proof: f が A_k において可積分であるとは，$f \cdot I_{A_k}$ が μ に関して可積分な可測函数であるときをいう．すると，

$$f(x)\cdot I_A(x) = \sum_{k=1}^n f(x)\cdot I_{A_k}(x), \quad 0 \le |f(x)\cdot I_A(x)| = |f(x)|\cdot I_A(x) = \sum_{k=1}^n |f(x)|\cdot I_{A_k}(x), \quad x \in X$$

に注意すると，問題 5.3 より，$|f|\cdot I_{A_k}$ は可積分であるので，$\sum_{k=1}^n |f|\cdot I_{A_k}$ も可積分となることが分かる．故に，$|f\cdot I_A|$ は可積分となり，従って再び問題 5.3 より $f\cdot I_A$ も可積分となる．ところで，

$$f(x)\cdot I_A(x) = \sum_{k=1}^n (f^+(x) - f^-(x))\cdot I_{A_k}(x) = \sum_{k=1}^n f^+(x)\cdot I_{A_k}(x) - \sum_{k=1}^n f^-(x)\cdot I_{A_k}(x), \quad x \in X$$

であり，定理 5.2 により

$$\int_X \sum_{k=1}^n f^\pm(x)\cdot I_{A_k}(x)\mu(dx) = \sum_{k=1}^n \int_X f^\pm(x)\cdot I_{A_k}(x)\mu(dx) = \sum_{k=1}^n \int_{A_k} f^\pm(x)\mu(dx) < \infty.$$

従って，

$$\begin{aligned}
\int_A f(x)\mu(dx) &= \int_X f(x)\cdot I_A(x)\mu(dx) \\
&= \int_X \sum_{k=1}^n f^+(x)\cdot I_{A_k}(x)\mu(dx) - \int_X \sum_{k=1}^n f^-(x)\cdot I_{A_k}(x)\mu(dx) \\
&= \sum_{k=1}^n \int_{A_k} f^+(x)\mu(dx) - \sum_{k=1}^n \int_{A_k} f^-(x)\mu(dx) \\
&= \sum_{k=1}^n \Big(\int_{A_k} f^+(x)\mu(dx) - \int_{A_k} f^-(x)\mu(dx)\Big) = \sum_{k=1}^n \int_{A_k} f(x)\mu(dx).
\end{aligned}$$

□

命題 5.5. $\mathcal{L}(X,\mu)$ は実ベクトル空間となる．すなわち $f,g\in\mathcal{L}(X,\mu)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ とすれば，$\alpha f+\beta g\in\mathcal{L}(X,\mu)$ となり，さらに

$$\int_X \big(\alpha f(x)+\beta g(x)\big)\mu(dx)=\alpha\int_X f(x)\mu(dx)+\beta\int_X g(x)\mu(dx)$$

が成り立つ．

Proof: $f,g\in\mathcal{L}(X,\mu)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ に対して，$0\le|\alpha f+\beta g|\le|\alpha|\cdot|f|+|\beta|\cdot|g|$ なので，問題 5.3 より $\alpha f+\beta g\in\mathcal{L}(X,\mu)$ であることは簡単に示される．

次に積分の線形性を示す．まず (5.8) より

$$\int_X (f^{\pm}(x)+g^{\pm}(x))\mu(dx)=\int_X f^{\pm}(x)\mu(dx)+\int_X g^{\pm}(x)\mu(dx)$$

であるので，$f(x)+g(x)=(f^+(x)+g^+(x))-(f^-(x)+g^-(x))$, $x\in X$ に注意すると

$$\begin{aligned}\int_X (f(x)+g(x))\mu(dx) &= \int_X (f^+(x)+g^+(x))\mu(dx)-\int_X (f^-(x)+g^-(x))\mu(dx)\\ &= \Big(\int_X f^+(x)\mu(dx)+\int_X g^+(x)\mu(dx)\Big)-\Big(\int_X f^-(x)\mu(dx)+\int_X g^-(x)\mu(dx)\Big)\\ &= \Big(\int_X f^+(x)\mu(dx)-\int_X f^-(x)\mu(dx)\Big)+\Big(\int_X g^+(x)\mu(dx)-\int_X g^-(x)\mu(dx)\Big)\\ &= \int_X f(x)\mu(dx)+\int_X g(x)\mu(dx).\end{aligned}$$

次に $\alpha\in\mathbb{R}$ に対して

$$\int_X \alpha f(x)\mu(dx)=\alpha\int_X f(x)\mu(dx)$$

を示す． $a>0$ とすると，命題 5.3(ii) より

$$\int_X \alpha f^{\pm}(x)\mu(dx)=\alpha\int_X f^{\pm}(x)\mu(dx)$$

が成り立つので， $h=\alpha f$ とおくと $h^{\pm}=\alpha f^{\pm}$ であるので

$$\begin{aligned}\int_X \alpha f d\mu=\int_X h d\mu &= \int_X h^+ d\mu-\int_X h^- d\mu\\ &= \int_X \alpha f^+ d\mu-\int_X \alpha f^- d\mu\\ &= \alpha\int_X f^+ d\mu-\alpha\int_X f^- d\mu=\alpha\int_X f d\mu.\end{aligned}$$

次に $\alpha<0$ のときは，$h=\alpha f$ に対して $h^{\pm}=(-\alpha)f^{\mp}$ に注意する． すると，

$$\begin{aligned}\int_X \alpha f d\mu=\int_X h d\mu &= \int_X h^+ d\mu-\int_X h^- d\mu=\int_X (-\alpha)f^- d\mu-\int_X (-\alpha)f^+ d\mu\\ &= (-\alpha)\int_X f^- d\mu-(-\alpha)\int_X f^+ d\mu=\alpha\int_X f^+ d\mu-\alpha\int_X f^- d\mu=\alpha\int_X f d\mu.\end{aligned}$$

最後に $\alpha = 0$ のときは，両辺 0 となるので $0 = 0$ として成り立つ．よって，これらを組み合わせると積分の線形性が示される． □

補題 5.6. $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$ に対して

$$\left|\int_X f(x)\mu(dx)\right| \le \int_X |f(x)|\mu(dx)$$

が成り立つ．

Proof: $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$ を正の部分と負の部分に分ける： $f = f^+ - f^-$. すると，$|f| = f^+ + f^-$ である． よって，三角不等式により

$$\left|\int_X f d\mu\right| = \left|\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu\right| \le \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu = \int_X (f^+ + f^-) d\mu = \int_X |f| d\mu.$$

□

補題 5.7. $A \in \mathcal{A}$ とする．

(1) f が A 上積分可能であれば，f は μ に関して A 上ほとんど至るところ有限な値をとる可測函数である．

(2) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ を完備な測度空間とする．このとき g, h を A 上で定義された関数とし，g は A 上積分可能な可測関数であり，また μ に関して A 上ほとんど至るところ $g = h$ を満たすならば，h も A 上積分可能な可測関数である．

Proof: (1). $E = A(f = +\infty) = A(f^+ = \infty)$ とおけば，補題 5.3 により

$$\infty > \int_A f^+ d\mu \ge \int_E f^+ d\mu = \infty \cdot \mu(E).$$

よって，$\mu(E) = 0$ でなければならない．すなわち， $\mu\bigl(A(f = +\infty)\bigr) = 0$. 同様に $\mu\bigl(A(f = -\infty)\bigr) = 0$ もわかるので，f は μ に関して A 上ほとんど至るところ有限であることがわかる．
(2): 測度空間 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ は完備である．g は A 上可測であり，かつ $g = h$ μ-a.e. on A より，補題 4.4 から h も A 上可測であることがわかる．そこで $N = A(g \ne h)$ とおけば， $\mu(N) = 0$ である．従って，(積分の) 定義より

$$\int_N g^+ d\mu = \int_N g^- d\mu = 0$$

となるので，

$$\int_N g d\mu = \int_N g^+ d\mu - \int_N g^- d\mu = 0.$$

同様に

$$\int_N h d\mu = 0.$$

よって，$A' = A - N$ とおくと

$$\int_A g d\mu = \int_{A'} g d\mu + \int_N g d\mu = \int_{A'} h d\mu + \int_N h d\mu = \int_A h d\mu.$$

□

問題 5.4. f を A 上可測とし，g を A 上で積分可能な可測函数とする．もし $|f| \leq g$ ならば，f は A 上積分可能となり，

$$\left|\int_A f d\mu\right| \leq \int_A g d\mu$$

が成り立つことを示せ．従って，特に f が A 上で有界な関数で，$\mu(A) < +\infty$ を満たせば，f は A 上積分可能となる．

5.3 極限定理

この節では，Lebesgue 積分を真に有効にするものである極限定理を述べることにする．その一つはすでに単調収束定理として述べているが，それを用いて，Lebesgue の名を冠した極限定理を示すことがここでの目的である． 補題を一つ用意する．

命題 5.6. (Fatou の補題) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathsf{MF}_+(X)$ に対し，

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\mu(dx) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\mu(dx).$$

Proof: 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\underline{f}_n := \inf_p f_{n+p} := \inf\{f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{n+p}, \cdots\}$$

とおくと，命題 4.5 により

$$\liminf_{n\to\infty} f_n := \sup_n \underline{f}_n$$

は可測函数となる．また $\underline{f}_n \leq f_n$ より，命題 5.3(1) から

$$\int_X \underline{f}_n(x)\mu(dx) \leq \int_X f_n(x)\mu(dx) \tag{5.12}$$

が成り立つ．一方，明らかに

$$0 \leq \underline{f}_1 \leq \underline{f}_2 \leq \cdots \leq \underline{f}_n \leq \cdots, \qquad \lim_{n\to\infty} \underline{f}_n = \liminf_{n\to\infty} f_n$$

であるので，単調収束定理 (MCT) により

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \underline{f}_n(x)\mu(dx) = \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\mu(dx).$$

よって (5.12) において両辺 n に関する下限をとれば，

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\mu(dx) = \liminf_{n\to\infty} \int_X \underline{f}_n(x)\mu(dx) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\mu(dx).$$

□

定理 5.3. (Lebesgue の収束定理: Lebesgue's dominated convergence theorem) [1] 可測函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，適当な関数 f, g が存在して，

$$
\begin{cases}
\text{(1) } |f_n| \leq g,\ n = 1, 2, \ldots \\
\text{(2) } g \text{ は } \mu \text{ に関して積分可能，すなわち } \displaystyle\int_X |g(x)|\mu(dx) < \infty \\
\text{(3) } f_n(x) \longrightarrow f(x)\ \mu\text{-}a.\ e.\ x \in X
\end{cases}
$$

を満たすものとする．このとき，次の極限と積分の交換が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\mu(dx) = \int_X f(x)\mu(dx).$$

Proof: 各 f_n は可測函数であることから，条件 (3), 補題 4.4 及び命題 4.5 により f は可測函数となる．また条件 (1)(2)，及び問題 5.4 を $A = X$ として適用すると f_n は積分可能であることが分かる．また 条件 (i) より

$$f_n + g \geq 0, \quad -f_n + g \geq 0$$

であり，それぞれの左辺は積分可能である．よって，Fatou の補題により

$$\int_X \liminf_{n\to\infty}(f_n + g)d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (f_n + g)d\mu, \quad \int_X \liminf_{n\to\infty}(-f_n + g)d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (-f_n + g)d\mu.$$

上のそれぞれの不等式から $\int_X g d\mu$ を引くと，

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu, \quad \int_X \liminf_{n\to\infty}(-f_n)d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (-f_n)d\mu. \tag{5.13}$$

一方， 条件 (3) より

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \mu\text{-a.e.}$$

に注意すると (5.13) の二番目の不等式は積分の線形性 (命題 5.5 を見よ) から

$$-\int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty}(-f_n)d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (-f_n)d\mu = -\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

となる．よって，(5.13) の一番目の不等式とあわせると

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

となり，これは

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\mu(dx) = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mu(dx) = \int_X f(x)\mu(dx)$$

を意味する． □

[1] Lebesgue の優収束定理とも言う:

系 5.2. (Lebesgue の有界収束定理: bounded convergence theorem)

可測函数列 $\{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$ が可測集合 A 上で一様に有界，すなわち，ある $M > 0$ があって，

$$|f_n(x)| \leq M, \quad x \in A$$

かつ $\mu(A) < \infty$ を満たしているとする．このとき，$f_n \to f$ μ-a.e. on A のとき，

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\mu(dx) = \int_A f(x)\mu(dx)$$

が成り立つ．

Proof: 各 n に対して，$f'_n = f_n \cdot I_A$, $f' = f \cdot I_A$, $g' = M \cdot I_A$ とおいて $\{f'_n, f', g'\}$ に対して Lebesgue の収束定理を適用すればよい． □

注意 5.4. Lebesgue の収束定理における条件 (1) 及び有界収束定理における条件 $|f_n| \leq M$ は非常に重要である．これがないと，定理の結果が成り立たないことがある．

以下の問題は，すべて $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathfrak{L}(\mathbb{R}), \mathcal{L})$ として考えよ．

問題 5.5. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ を積分可能な Lebesgue 可測函数とし，また $f \geq 0$ とする．このとき，任意の Lebesgue 可測集合 A に対して

$$\mu(A) := \int_A f(x)\mathcal{L}(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot I_A(x)\mathcal{L}(dx)$$

とおくと，μ は $(\mathbb{R}, \mathfrak{L}(\mathbb{R}))$ 上の測度となることを示せ．

問題 5.6. Lebesgue 可測函数 f に対して，ある $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ に対して $\alpha \leq f \leq \beta$ を満たすとする．また，g は積分可能で正値な可測函数とする．このとき，次を満たすような $\gamma \in \mathbb{R}$ が存在することを示せ：

$$\alpha \leq \gamma \leq \beta, \quad \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot g(x)\mathcal{L}(dx) = \gamma \int_{\mathbb{R}} g(x)\mathcal{L}(dx)$$

問題 5.7. (Reverse Fatou's lemma) Lebesgue 可測函数列 $\{f_1, f_2, \ldots\}$ に対して，ある積分可能な Lebesgue 可測函数 g が存在して，常に $0 \leq f_n \leq g$ を満たすとする．このとき，

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mathcal{L}(dx) \leq \int_{\mathbb{R}} \limsup_{n\to\infty} f_n(x)\mathcal{L}(dx)$$

を満たすことを示せ．

問題 5.8. Lebesgue 可測函数 f が積分可能のとき，f が有界であれば $|f|^2$ も積分可能である．f が有界でないとき，このことは一般には成立しない．そのような反例を挙げよ．

問題 5.9. (Chebyshev の不等式) Borel 集合 A は $\mathcal{L}(A) < \infty$ を満たすとする．また，A 上で $|f|^2$ が可積分となる Borel 可測函数 f を考える．このとき，f は A 上可積分となることを示し，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\mathcal{L}(A(|f| \geq \varepsilon)) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_A |f|^2 \mathcal{L}(dx)$$

が成り立つことも示せ．この不等式を Chebychev の不等式という．

問題 5.10. (Jensen の不等式) 上の問題の設定の下に，φ を実数値の連続な凸関数とするとき，

$$\varphi\Big(\frac{1}{\mathcal{L}(A)} \int_A f(x)\mathcal{L}(dx)\Big) \leq \frac{1}{\mathcal{L}(A)} \int_A \varphi(f(x))\mathcal{L}(dx)$$

が成り立つことを示せ．これを Jensen の不等式という．

5.4 Riemann 積分と Lebesgue 積分

この節では，**有界閉区間**では Lebesgue 積分が真に Riemann 積分の拡張になっていることを示す．そのために，ここでは測度空間としては 1 次元 Lebesgue 空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{L}(\mathbb{R}), \mathcal{L})$ で考える．

定理 5.4. $A = [a, b]$ とする．このとき，A 上で有界な函数 f が，Riemann の意味で可積分であるとし，A における f の Riemann 積分を

$$\text{(R)} \int_a^b f(x)dx$$

と書くことにする．このとき，f は $\mathbb{R}$ の Lebesgue 測度に関して A 上可積分となり，かつ A における f の Lebesgue 積分を特に

$$\text{(L)} \int_a^b f(x)dx$$

と書くことにすると，

$$\text{(R)} \int_a^b f(x)dx = \text{(L)} \int_a^b f(x)dx.$$

但し，$-\infty < a < b < +\infty$.

Proof: $[a, b]$ の分割として，特に 2^n 等分 $(n = 1, 2, \ldots)$ したものを採用し，その分点を

$$\Delta_n : a = x_{n,0} < x_{n,1} < \cdots < x_{n,k} < \cdots < x_{n,2^n} = b$$

とし，$k = 1, 2, \ldots, 2^n$ に対して

$$\lambda_{n,k} = \inf_{x_{n,k-1} \leq x < x_{n,k}} f(x), \quad \Lambda_{n,k} = \sup_{x_{n,k-1} \leq x < x_{n,k}} f(x)$$

とおき，また $A_{n,k} = [x_{n,k-1}, x_{n,k})$，$A_b = [b, b]$ としたとき

$$\underline{f}_n(x) = \sum_{k=1}^{2^n} \lambda_{n,k} I_{A_{n,k}}(x) + f(b) I_{A_b}(x), \quad \overline{f}_n(x) = \sum_{k=1}^{2^n} \Lambda_{n,k} I_{A_{n,k}}(x) + f(b) I_{A_b}(x)$$

とおくと，$\underline{f_n}$，$\overline{f_n}$ はともに単函数であるので，Borel 可測，従って Lebesgue 可測函数となる．また，作り方から明からに

$$\text{(R)}\int_a^b \underline{f_n}(x)dx = \text{(L)}\int_a^b \underline{f_n}(x)dx, \qquad \text{(R)}\int_a^b \overline{f_n}(x)dx = \text{(L)}\int_a^b \overline{f_n}(x)dx.$$

一方，明らかに $\underline{f_n} \le f \le \overline{f_n}$ であり，さらに

$$\underline{f_1} \le \underline{f_2} \le \cdots \le \underline{f_n} \le \cdots, \quad \overline{f_1} \ge \overline{f_2} \ge \cdots \ge \overline{f_n} \ge \cdots$$

となるので，

$$\lim_{n\to\infty} \underline{f_n} =: \underline{f} \le f, \qquad \lim_{n\to\infty} \overline{f_n} =: \overline{f} \ge f$$

とおくと，$\underline{f}$，$\overline{f}$ はともに $A = [a,b]$ 上 Lebesgue 可測であることがわかる．

次に $M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ とし，$h(x) = M \cdot I_A(x)$ とおくと h は積分可能であり，

$$|\underline{f_n}| \le h, \quad |\overline{f_n}| \le h$$

が成り立つ．よって，Lebesgue の収束定理により

$$\lim_{n\to\infty} \text{(R)}\int_a^b \underline{f_n}(x)dx = \lim_{n\to\infty} \text{(L)}\int_a^b \underline{f_n}(x)dx = \text{(L)}\int_a^b \underline{f}(x)dx,$$

$$\lim_{n\to\infty} \text{(R)}\int_a^b \overline{f_n}(x)dx = \lim_{n\to\infty} \text{(L)}\int_a^b \overline{f_n}(x)dx = \text{(L)}\int_a^b \overline{f}(x)dx$$

を得る．ところで (R) $\int_a^b \underline{f_n}(x)dx$ は f の Darboux の下積分，(R) $\int_a^b \overline{f_n}(x)dx$ は f の Darboux の上積分となるので，f が A 上 Riemann 積分可能であることから，

$$\lim_{n\to\infty} \text{(R)}\int_a^b \underline{f_n}(x)dx = \lim_{n\to\infty} \text{(R)}\int_a^b \overline{f_n}(x)dx = \text{(R)}\int_a^b f(x)dx$$

とならなければならない．故に Lebesgue 可測函数 $\overline{f}$，$\underline{f}$ の二つの A における (Lebesgue) 積分は一致し，

$$\text{(R)}\int_a^b f(x)dx$$

と等しい．$\underline{f} \le \overline{f}$ により，結局 $\overline{f}$ と $\underline{f}$ は A 上殆ど至る所一致しなければならない．従って，

$$\underline{f} = f = \overline{f} \quad \text{a.e. on } [a,b].$$

すると，補題 4.4 を用いると，f は Lebesgue 可測函数と殆ど至る所等しくなるので，Lebesgue 空間の完備性によって f も A 上 Lebesgue 可測函数となり，またその Lebesgue 積分は (R) $\int_a^b f(x)dx$ と一致する，すなわち

$$\text{(L)}\int_a^b f(x)dx = \text{(R)}\int_a^b f(x)dx$$

が成り立つ． □

注意 5.5. (1) $A=[0,1]$ とし，f を例題 1.2 で定義した Dirichlet の関数とする：

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\cap[0,1],\\ 0, & x\in[0,1]-\mathbb{Q}.\end{cases}$$

すると，f は Lebesgue 可測函数となり，さらに (L) $\int_0^1 f(x)dx=0$ である．一方，例題 1.2 でも示したが，f は Riemann 積分可能ではない．従って，Riemann 積分可能でない Lebesgue 積分可能な関数が存在することになるので,（**有界閉区間**上では）Lebesgue 積分が Riemann 積分の真の拡張となっていることが分かる．

(2) $A=(a,b)$ の場合や $\mathbb{R}$ の場合などは，Riemann 積分は，一般には**異常積分** (または広義積分：improper integral) として定義されるため，状況は異なる．実際に $\mathbb{R}$ において,（異常積分の意味で）Riemann 積分可能であるが，Lebesgue 積分可能でないような関数が存在することが知られている．

最後に，具体的に 1 次元 Lebesgue 可積分な函数を，その積分の値を極限定理を用いて計算をすることができる例題を一つ紹介しよう．

例題 5.1. $(\mathbb{R},\mathfrak{L},\mathcal{L})$ を 1 次元 Lebesgue 空間とする．$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2},\quad x\in\mathbb{R}$ の積分を考える．

f は $\mathbb{R}$ 上の連続関数なので，$\mathfrak{L}$-可測函数である．しかも非負値である．そこで，$A_n=[-n,n]$ 及び $f_n=f\cdot I_{A_n}$ とおくと，

$$0\le f_1\le f_2\le\cdots\le f_n\le\cdots,\quad \lim_{n\to\infty}f_n=f$$

であるので，この $\{f_n\}$ に対しては単調収束定理が適用できる． また，

$$\int_{\mathbb{R}}f_n(x)\mathcal{L}(dx)=\int_{\mathbb{R}}f(x)\cdot I_{A_n}(x)\mathcal{L}(dx)=\int_{A_n}f(x)\mathcal{L}(dx)$$

となる．ところで，$A_n=[-n,n]$ は有界閉区間であり，その上の連続関数は Riemann 積分可能であるので，その上の Riemann 積分と Lebesgue 積分は一致する．よって，右辺の積分は (R) $\int_{-n}^n f(x)dx$ である．よって，

$$\text{(R)}\int_{-n}^{n}f(x)dx=\int_{-n}^{n}\frac{1}{x^2+1}dx=\left[\tan^{-1}x\right]_{-n}^{n}=\tan^{-1}n-\tan^{-1}(-n)$$

となる．$n\to\infty$ とすると，$\tan^{-1}n\to\frac{\pi}{2}$，$\tan^{-1}(-n)\to-\frac{\pi}{2}$ に注意して

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{x^2+1}\mathcal{L}(dx)=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f_n(x)\mathcal{L}(dx)=\lim_{n\to\infty}\left(\tan^{-1}n-\tan^{-1}(-n)\right)=\pi$$

となる．

問題 5.11. $n\in\mathbb{N}$ に対して，

$$\lim_{\ell\to\infty}\int_0^{\ell}x^n\Big(1-\frac{x}{\ell}\Big)^{\ell}dx=n!$$

を，積分を正当化した上で示せ．

さて，この節の最後に応用上重要な定理の一つを Lebesgue の収束定理を用いて導く．そのために次の事実に注意する．

命題 5.7. f を $\mathbb{R}^d$ の適当な部分集合 Ω 上で定義された実数値函数とする．このとき，

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$$

であるための必要十分条件は，$\{x_j\}$ を $\lim_{j\to\infty} x_j = x_0$ となる Ω の任意の点列とするとき，

$$\lim_{j\to\infty} f(x_j) = \alpha$$

が必ず成立することである．

Proof: $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$ とする．すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，適当な正数 $\delta > 0$ が存在して，

$$0 < |x - x_0| < \delta,\ x \in \Omega \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

となることである． 今，$x_j \to x_0$ となる Ω の任意の点列 $\{x_j\}$ を考える．このとき，ある番号 N を $j \geq N$ ならば $|x_j - \alpha| < \delta$ となるようにとれば，$|f(x_j) - \alpha| < \varepsilon$ である．これは，$\lim_{j\to\infty} f(x_j) = \alpha$ を示している．

逆を示す．これは背理法を用いる． $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq \alpha$ としてみる．すなわち，適当な正数 $\varepsilon > 0$ が取れて，どんな正数 $\delta > 0$ をとっても，ある $x_\delta \in \Omega$ で，

$$0 < |x_\delta - x_0| < \delta \quad かつ \quad |f(x_\delta) - \alpha| \geq \varepsilon$$

を満たすように出来る．いま各自然数 j に対して，$\delta = 1/j$ とし，$y_j = x_{1/j}$ とおくと，$y_j \in \Omega$, $|y_j - x_0| < 1/j$ かつ $|f(y_j) - \alpha| \geq \varepsilon$ である．これは，x_0 に収束する数列 $\{y_j\}$ で，$f(y_j)$ が α に収束しないことを示しており，仮定に反する．よって，命題が示された． $\square$

定理 5.5. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間，$A \in \mathcal{M}$ とする．いま， G を $\mathbb{R}^d$ の開集合，$f(x, y)$ は直積空間 $A \times G$ で定義された実数値函数であり，各 $y \in G$ に対して $f(x, y)$ は x の函数として A 上で μ-可積分とする．また，

$$F(y) = \int_A f(x, y)\mu(dx), \quad y \in G$$

とおく．積分は y を止めて x の変数として行われる．このとき，以下のことが成り立つ．

(i) $f(x, y)$ は次を満たすとする：

(i-1) μ-a.e. $x \in A$ で，y の函数として G 上連続である．

(i-2) 適当な，A 上可積分な $\varphi \in \mathsf{MF}_+(X)$ が存在して，μ-a.e. $x \in A$ に対して，$|f(x, y)| \leq \varphi(x)$ がすべての $y \in G$ で成立する．

このとき，$F(y)$ は G 上有界かつ連続である．

(ii) $f(x,y)$ は次を満たすとする

(ii-1) μ-a.e. $x \in A$ で，偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial y_k}(x,y)$ がすべての $y \in G$ に対して存在する．

(ii-2) ある A 上可積分な $\varphi \in \mathsf{MF}_+(X)$ が存在して，μ-a.e. $x \in A$ に対して，$\left|\dfrac{\partial f}{\partial y_k}(x,y)\right| \leq \varphi(x)$ がすべての $x \in G$ について成立する．

このとき，$F(y)$ は y_k について G 上偏微分可能で，次の積分記号下での微分が成立する：

$$\frac{\partial}{\partial y_k}F(y) = \int_A \frac{\partial f}{\partial y_k}(x,y)\mu(dx). \tag{5.14}$$

Proof: (i). $|F(y)| \leq \displaystyle\int_A |f(x,y)|\mu(dx) \leq \int_X \varphi(x)\mu(dx) < \infty$ より，$F(y)$ は G 上有界である．次に連続性を示すには，$y_0 \in G$ に対して，$\displaystyle\lim_{y\to y_0} F(y) = F(y_0)$ を示すのであるが，そのためには，命題 5.7 より y_0 に収束する任意の点列 $\{y_j\} \subset G$ をとるとき，$\displaystyle\lim_{j\to\infty} F(y_j) = F(y_0)$ を示せばよい．仮定 (i-1) より $\displaystyle\lim_{j\to\infty} f(x,y_j) = f(x,y_0)$ が μ-a.e. $x \in A$ について成立する．また，仮定 (i-2) より，μ-a.e. $x \in A$ について $|f(x,y_j)| \leq \varphi(x)$ かつ $\displaystyle\int_A \varphi(x)\mu(dx) < \infty$ が成立するから，Lebesgue の優収束定理により，

$$\lim_{j\to\infty} F(y_j) = \lim_{j\to\infty}\int_A f(x,y_j)\mu(dx) = \int_A \lim_{j\to\infty} f(x,y_j)\mu(dx) = \int_A f(x,y_0)\mu(dx) = F(y_0).$$

よって，F は $y_0 \in G$ で連続であることが分かった．y_0 は任意なので，F は G 上で連続である．

(ii). 第 k 成分が 1 で残りがすべて 0 であるような単位ベクトル $\boldsymbol{e}_k = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ をとる．

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(y+h\boldsymbol{e}_k) - F(y)}{h} = \int_A \frac{\partial f}{\partial y_k}(x,y)\mu(dx)$$

を示せばよい．そのためには，再び命題 5.7 より $\displaystyle\lim_{j\to 0} h_j = 0$ となる $\mathbb{R}$ の任意の点列 $\{h_j\}$ に対して，

$$\lim_{j\to\infty}\frac{F(y+h_j\boldsymbol{e}_k) - F(y)}{h_j} = \int_A \frac{\partial f}{\partial y_k}(x,y)\mu(dx)$$

を示せばよい．ところで，平均値の定理より，ある θ $(0 < \theta < 1)$ が存在して，

$$\frac{f(x,y+h_j\boldsymbol{e}_k) - f(x,y)}{h_j} = \frac{\partial f}{\partial y_k}(x, y+\theta h_j\boldsymbol{e}_k)$$

が成立する．このとき，仮定 (ii-2) により μ-a.e. $x \in A$ に対して，

$$\left|\frac{f(x,y+h_j\boldsymbol{e}_k) - f(x,y)}{h_j}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial y_k}(x, y+\theta h_j\boldsymbol{e}_k)\right| \leq \varphi(x)$$

がすべての j について成立する．また，仮定 (ii-1) から μ-a.e. $x \in A$ について

$$\lim_{j\to\infty}\frac{f(x,y+h_j\boldsymbol{e}_k) - f(x,y)}{h_j} = \frac{\partial f}{\partial y_k}(x,y)$$

が成り立つ．よって，Lebesgue の優収束定理より，

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty}\frac{F(y+h_j\boldsymbol{e}_k)-F(y)}{h_j} &= \lim_{j\to\infty}\int_A\frac{f(x,y+h_j\boldsymbol{e}_k)-f(x,y)}{h_j}\mu(dx)\\
&= \int_A\lim_{j\to\infty}\frac{f(x,y+h_j\boldsymbol{e}_k)-f(x,y)}{h_j}\mu(dx)=\int_A\frac{\partial f}{\partial y_k}(x,y)\mu(dx).
\end{aligned}$$

よって，(ii) が成立する． □

問題 5.12. 上の，積分記号下での微分の定理を用いて

$$\int_0^\infty e^{-sx}x^{-1}\sin^2 x\,dx=\frac{1}{4}\ln\bigl(1+\frac{4}{s^2}\bigr),\quad s>0$$

を示せ．

Chapter 6

測度の構成および拡張

この章では，具体的に測度を構成することを行う．すなわち，可測空間上に定義され，(m1) および (m2) を満たす σ-加法族上の集合関数を構成することである．しかしながら，はじめから σ-加法族が与えられ，更にその上に集合関数が与えられることはまれである．実際には，必ずしも σ-加法族ではない適当な集合族上で集合関数が定義され，その生成する σ-加法族上に，うまく拡張することによってなされるのがほとんどである．

以下その手順を説明していくことにする．そうして，この節の最後に Lebesgue 測度を構成することにしよう．

6.1 Dynkin 族定理

定義 6.1. X を空でない集合とする． X の適当な部分集合族 $\mathcal{D}$ $\big(\subset \mathcal{P}(X)\big)$ は，次の性質を満たすとき Dynkin 族 (Dynkin class) といわれる：

(D1) $X \in \mathcal{D}$

(D2) $A \in \mathcal{D} \quad \Longrightarrow \quad A^c \in \mathcal{D}$

(D3) $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{D},\ A_i \cap A_j = \varnothing\ (i \neq j) \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D}$

注意 6.1. $\mathcal{A}$ が X 上の σ-加法族であれば，Dynkin 族となることはわかる．しかし，その逆は一般には成り立たない．

問題 6.1. X を空でない集合とする．このとき，$\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ が Dynkin 族であることと，$\mathcal{D}$ が次の三つの条件を満たすこととは同値となることを示せ．

(D1) $X \in \mathcal{D}$

(D2)' $A, B \in \mathcal{D},\ A \subset B \quad \Longrightarrow \quad B - A \in \mathcal{D}.$

(D3)' $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{D},\ A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_i \subset \cdots \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D}$

命題 6.1. X を空でない集合とし，$\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ とすると，$\mathcal{G}$ を含む最小の Dynkin 族が存在する．それを $\delta(\mathcal{G})$ と書き表し，$\mathcal{G}$ の生成する Dynkin 族という．また，$\mathcal{G} \subset \delta(\mathcal{G}) \subset \sigma(\mathcal{G})$ が成り立つ．

Proof: $\delta(\mathcal{G})$ の存在の証明は，定理 3.1 とほとんど同じようになされる．また，σ-加法族の場合と同じように，$\mathcal{G}$ が既に Dynkin 族であれば，$\delta(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$ である．従って，$\delta(\sigma(\mathcal{G})) = \sigma(\mathcal{G})$ である．よって，$\mathcal{G} \subset \sigma(\mathcal{G})$ であるから，$\delta(\mathcal{G}) \subset \delta(\sigma(\mathcal{G})) = \sigma(\mathcal{G})$. □

補題 6.1. X 上の Dynkin 族 $\mathcal{D}$ が σ-加法族であるための必要十分条件は，$\mathcal{D}$ が**乗法族** (multiplicative class) であることである，すなわち，

$$A, B \in \mathcal{D} \quad \Longrightarrow \quad A \cap B \in \mathcal{D} \tag{6.1}$$

を満たすことである．

Proof: ($\Rightarrow$) 明らか．

($\Leftarrow$) (6.1) を満たす Dynkin 族 $\mathcal{D}$ が可算和について閉じていることを示す．

$\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$ に対して，$B_1 = A_1 \in \mathcal{D}$ とおき，$i \geq 2$ に対しては，

$$B_i = A_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j = A_i \cap A_{i-1}^c \cap \cdots \cap A_1^c$$

とおくと，(D2) および (6.1) を繰り返し用いることにより $B_i \in \mathcal{D}$ であり，さらに作り方から $B_i \cap B_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ となる．よって，(D3) より

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{D}.$$

□

次の定理は，乗法族上で定義された前測度 (pre-measure) ともいうべき集合関数を，一意的にその生成する σ-加法族上に拡張できるための条件を与える重要な定理である．

定理 6.1. **(Dynkin 族定理)** 空でない集合 X 上の集合族 $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ が乗法族，すなわち，(6.1) を満たす集合族ならば，

$$\delta(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{G})$$

が成り立つ．

Proof: 命題 6.1 により，$\delta(\mathcal{G}) \subset \sigma(\mathcal{G})$ は成立していることから，逆の包含関係を示せば十分である．上の補題により，$\delta(\mathcal{G})$ が (6.1) を満たすことを示せばよいことが分かる．そのために，まず,

$$\mathcal{G}_1 := \left\{ B \subset X : \ \forall A \in \mathcal{G}, \ A \cap B \in \delta(\mathcal{G}) \right\}$$

とおく．$\mathcal{G}$ は (6.1) を満たすことから，$\mathcal{G}_1$ は $\mathcal{G}$ を含むことがわかる．次に $\mathcal{G}_1$ は Dynkin 族であること，すなわち，(D1)(D2)(D3) を満たすことを示そう． 全体集合 X に対して，任意に $A \in \mathcal{G}$ をとると，$A \cap X = A \in \mathcal{G} \subset \delta(\mathcal{G})$ より，$X \in \mathcal{G}_1$ がわかる．次に $B \in \mathcal{G}_1$ を任意に取る．

$A \in \mathcal{G}$ に対して，$A \cap B \in \delta(\mathcal{G})$．また，$\delta(\mathcal{G})$ が (D2)' を満たすことに注意すると，$A \cap B \subset A$ より

$$A \cap B^c = A - (A \cap B) \in \delta(\mathcal{G}), \quad \forall A \in \mathcal{G}$$

がわかる．よって，$B^c \in \mathcal{G}_1$ がわかる．次に集合列 $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{G}_1$ が $B_i \cap B_j = \varnothing\ (i \neq j)$ を満たすとすると，任意の $A \in \mathcal{G}$ 及び任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$A \cap B_i \in \delta(\mathcal{G})$ であり，また $i \neq j$ ならば，$\big(A \cap B_i\big) \cap \big(A \cap B_j\big) = \varnothing$ より，

$$A \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\big(A \cap B_n\big) \in \delta(\mathcal{G}), \quad \forall A \in \mathcal{G}.$$

従って，$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{G}_1$ となり，$\mathcal{G}_1$ は $\mathcal{G}$ を含む Dynkin 族であることが分かった．故に，$\delta(\mathcal{G}) \subset \mathcal{G}_1$．これは，

$$A \in \delta(\mathcal{G}),\ B \in \mathcal{G} \quad \Longrightarrow \quad A \cap B \in \delta(\mathcal{G})$$

を意味する．次に，集合族

$$\mathcal{G}_2 := \big\{B \subset X :\ \forall A \in \delta(\mathcal{G}),\ A \cap B \in \delta(\mathcal{G})\big\}$$

を考えると，$\mathcal{G}_2$ は $\mathcal{G}$ を含む．また，$\mathcal{G}_1$ のときと同様に $\mathcal{G}_2$ も Dynkin 族であることが示される．よって，$\delta(\mathcal{G}) \subset \mathcal{G}_2$．これは，

$$A \in \delta(\mathcal{G}),\ B \in \delta(\mathcal{G}) \quad \Longrightarrow \quad A \cap B \in \delta(\mathcal{G}),$$

すなわち，$\delta(\mathcal{G})$ が (6.1) であることが分かった．故に $\delta(\mathcal{G})$ は $\mathcal{G}$ を含む σ-加法族となることが分かる．よって，$\delta(\mathcal{G}) \supset \sigma(\mathcal{G})$． □

問題 6.2. 上の定理の証明において，$\mathcal{G}_2$ が Dynkin 族となっていることを実際に証明せよ．

上の定理の証明を用いて，測度の一意性定理について述べておこう．

定理 6.2. (測度の一意性定理: uniqueness of measures) $(X, \mathcal{A})$ を可測空間とし，μ 及び ν をその上で定義された，ともに σ-有限な測度とし，次の様な集合族 $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ が存在するものとする：

- $\mathcal{G}$ は乗法族である；
- 適当な集合族 $\{G_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{G}$ で，

  $$G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_n \subset \cdots, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = X$$

  を満たすものが存在する；
- $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{G})$.

このとき，もし，

$$\mu(A) = \nu(A),\ \forall A \in \mathcal{G}, \quad \mu(G_n) = \nu(G_n) < \infty, \quad n = 1, 2, \ldots$$

が成り立てば，

$$\mu(A) = \nu(A), \quad \forall A \in \mathcal{A} = \sigma(\mathcal{G}).$$

Proof: 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\mathcal{D}_n := \big\{A \in \mathcal{A} :\ \mu(G_n \cap A) = \nu(G_n \cap A)\big\}$$

とおく．まず $\mathcal{D}_n$ が Dynkin 族であることを示そう．(D1) は明らかである．次に，$A \in \mathcal{D}_n$ ならば， $\mu(G_n) = \nu(G_n) < \infty$ であるから，

$$\begin{aligned}
\mu(G_n \cap A^c) = \mu(G_n - A) &= \mu(G_n) - \mu(A \cap G_n) \\
&= \nu(G_n) - \nu(A \cap G_n) = \nu(G_n - A) = \nu(G_n - A).
\end{aligned}$$

よって，$A^c \in \mathcal{D}_n$ となるから (D2) が成り立つ．$\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}_n$ に対して，$A_k \cap A_{k'} = \varnothing\ (k \neq k')$ を仮定すると，

$$\begin{aligned}
\mu\Big(G_n \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) &= \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}(G_n \cap A_k)\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(G_n \cap A_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \nu(G_n \cap A_k) = \nu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}(G_n \cap A_k)\Big) \\
&= \nu\Big(G_n \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big),
\end{aligned}$$

したがって，$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{D}_n$. ところで，$\mathcal{G}$ は (6.1) を満たし，$\mathcal{G} \subset \mathcal{D}_n$ となるから，Dynkin 族定理により，$\delta(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{A}$ かつ $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{G}) \subset \mathcal{D}_n \subset \mathcal{A}$. よって，

$$\mathcal{D}_n = \mathcal{A}, \quad n \in \mathbb{N}$$

が成り立つことがわかる．ゆえに

$$\mu(G_n \cap A) = \nu(G_n \cap A), \quad n \in \mathbb{N},\ A \in \mathcal{A}.$$

上の式において，両辺 $n \to \infty$ とすると，$\{G_n\}$ に対する仮定と測度の単調収束定理 (定理 3.4) により，

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(G_n \cap A) = \lim_{n\to\infty} \nu(G_n \cap A) = \nu(A), \quad A \in \mathcal{A}$$

を得る． □

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して，位相 (開集合族) $\mathcal{O}$ の生成する σ-加法族を，ユークリッド空間の場合と同じく $\mathcal{B}(X)$ と書くことにする．そうして $\mathcal{B}(X)$ を定義域とする σ-有限な測度を $\boldsymbol{X}$ 上の Borel 測度 (Borel measure) という．

ところで，二つの開集合の共通部分は再び開集合であるので，$\mathcal{O}$ は (6.1) を満たす．従って，$\mathcal{B}(X)$ は $\mathcal{O}$ で生成される Dynkin 族と一致する: $\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{O}) = \delta(\mathcal{O})$. 従って，上の定理から，もし $\mathcal{B}(X)$ 上で定義された二つの σ-有限な測度が開集合族上で一致すれば，$\mathcal{B}(X)$ 上で完全に一致することが分かる．言い換えると，

"位相空間上の Borel 測度はその開集合上の値によって完全に決定される．"

上の議論は，$\mathcal{B}(X)$ を生成するような任意の乗法族（たとえば，閉集合族）をとってきても成り立つ．

6.2 測度の構成 (存在)

空でない集合 X のすべての部分集合 A に対して $\mu^*(A) \in \overline{\mathbb{R}}$ が定義され，次の条件を満たすとき，集合関数 μ^* は X 上の Carathéodory **の外測度** (outer measure) と呼ばれる：

(C1) $0 \leq \nu^*(A) \leq \infty, \quad \forall A \in \mathcal{P}(X)$

(C2) $\nu^*(\varnothing) = 0$

(C3) (単調性) $A \subset B \quad \Longrightarrow \quad \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

(C4) (可算列加法性) $\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$

μ^*-可測集合

X 上の外測度 μ^* に関して，集合 A が**可測** (**μ^*-可測集合**) であるとは，

$$\mu^*(\Gamma) = \mu^*(A \cap \Gamma) + \mu^*(A^c \cap \Gamma), \quad \forall \Gamma \subset X \tag{6.2}$$

となるときをいう．ところで，(C4) において，$A_1 = A \cap \Gamma, A_2 = A^c \cap \Gamma, A_n = \varnothing \ (n \geq 3)$ とおけば，$\Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ だから (C2) により，

$$\mu^*(\Gamma) \leq \mu^*(A \cap \Gamma) + \mu^*(A^c \cap \Gamma)$$

は常に成立することがわかるから，μ^*-可測の条件 (6.2) は不等式

$$\mu^*(\Gamma) \geq \mu^*(A \cap \Gamma) + \mu^*(A^c \cap \Gamma), \quad \forall \Gamma \subset X \tag{6.2'}$$

で置き換えてもよい．

定理 6.3. (Carathéodory) μ^* を X 上の外測度とし，$\mathcal{M}$ を μ^*-可測な集合全体とすると，μ^* を $\mathcal{M}$ に制限したもの $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ は X 上の測度となる．

Proof: $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}}$ とおく．このとき，$\mathcal{M}$ が σ-加法族であること，すなわち，(M1)-(M3) を満たすこと，及び μ がその上で測度の条件 (m1)(m2) を満たすことを示す必要がある． 以下，それを示そう：

$\triangleright$ $\mathcal{M}$ が σ-加法族であること:
任意の $\Gamma \subset X$ に対して，$X \cap \Gamma = \Gamma$, $X^c \cap \Gamma = \varnothing$ より，

$$\mu^*(X \cap \Gamma) = \mu^*(\Gamma),\ \mu^*(X^c \cap \Gamma) = \mu^*(\varnothing) = 0.$$

よって，X に対して，(6.2) が成り立つので $X \in \mathcal{M}$ がわかる．次に $A \in \mathcal{M}$ とする．このとき，$(A^c)^c = A$ より，任意の $\Gamma \subset X$ に対して

$$\mu^*(\Gamma) = \mu^*(A \cap \Gamma) + \mu^*(A^c \cap \Gamma) = \mu^*((A^c)^c \cap \Gamma) + \mu^*(A^c \cap \Gamma)$$

より $A^c \in \mathcal{M}$ であることが分かる．$A, B \in \mathcal{M}$ とすると，

$$\begin{aligned}
\mu^*(\Gamma) &= \mu^*(A \cap \Gamma) + \mu^*(A^c \cap \Gamma) \\
&= \mu^*(A \cap \Gamma) + \mu^*\big(B \cap (A^c \cap \Gamma)\big) + \mu^*\big(B^c \cap (A^c \cap \Gamma)\big) \\
&\geq \mu^*\Big(\big(A \cap \Gamma\big) \cup \big((B \cap A^c) \cap \Gamma\big)\Big) + \mu^*\big((B \cup A)^c \cap \Gamma\big) \\
&= \mu^*\big((A \cup B) \cap \Gamma\big) + \mu^*\big((A \cup B)^c \cap \Gamma\big).
\end{aligned}$$

これは $A \cup B \in \mathcal{M}$ を意味する． 同様に考えると $A \cap B, A - B \in \mathcal{M}$ も出てくることに注意する． 最後に $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ に対して，$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$ となることを示す．

$C_1 = B_1 = A_1$ とおき，$n \geq 2$ に対しては

$$B_n := \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \qquad C_n := B_n - B_{n-1}$$

と定める．すると $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ となる．従って，任意の $\Gamma \subset X$ に対して $A \cap \Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty}(C_n \cap \Gamma)$ となる．

一方，(C4) より $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(C_n \cap \Gamma) \geq \mu^*(A \cap \Gamma)$ となる．よって，$\mu^*(\Gamma) < \infty$ に対して

$$\mu^*(\Gamma) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(C_n \cap \Gamma) + \mu^*(A^c \cap \Gamma) \tag{6.3}$$

が示されれば，$A \in \mathcal{M}$ であることが分かる．また，(6.3) を示すためには，任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$\mu^*(\Gamma) \geq \sum_{k=1}^{n} \mu^*(C_k \cap \Gamma) + \mu^*(A^c \cap \Gamma) \tag{6.4}$$

を示すことが出来れば，$n \to \infty$ として (6.3) が得られることになる．

そこで，$n \in \mathbb{N}$ を任意に固定する．このとき，B_n は $\mathcal{M}$ の元であり，$B_n \subset A$ を満たす．従って $A^c \subset B_n^c$ より

$$\mu^*(\Gamma) = \mu^*(B_n \cap \Gamma) + \mu^*(B_n^c \cap \Gamma) \geq \mu^*(B_n \cap \Gamma) + \mu^*(A^c \cap \Gamma)$$

この不等式と (6.4) を見較べると，結局は

$$\mu^*(\Gamma \cap B_n) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(\Gamma \cap C_i) \tag{6.5}$$

を証明することに帰着される． 以下 (6.5) を帰納法によって示すことにする．

まず，$n = 1$ のときは，$B_1 = C_1$ であるから

$$\mu^*(B_1 \cap \Gamma) = \mu^*(C_1 \cap \Gamma).$$

すなわち，$n = 1$ のときは (6.5) は成立する．よって，$n \geq 2$ のとき，各 $k = 1, 2, \ldots, n$ について

$$\mu^*(B_k \cap \Gamma) \geq \sum_{i=1}^{k} \mu^*(C_i \cap \Gamma)$$

が成立しているものとする．このとき，まず， C_{n+1} は $\mathcal{M}$ の元であるから，$\Gamma' = B_{n+1} \cap \Gamma$ に対して

$$\begin{aligned}
\mu^*(B_{n+1} \cap \Gamma) \; = \; \mu^*(\Gamma') &= \mu^*(C_{n+1} \cap \Gamma') + \mu^*(C_{n+1}^c \cap \Gamma') \\
&= \mu^*(C_{n+1} \cap B_{n+1} \cap \Gamma) + \mu^*(C_{n+1}^c \cap B_{n+1} \cap \Gamma)
\end{aligned} \tag{6.6}$$

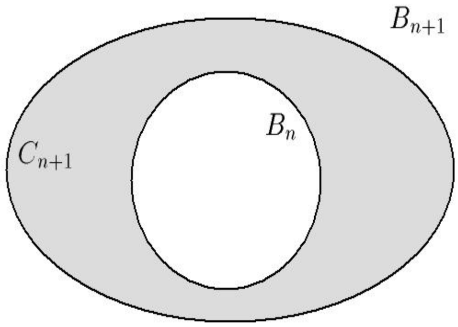
が成立する． ところで，B_{n+1}，C_{n+1} の作り方より $C_{n+1} \subset B_{n+1}$ だから，

$$C_{n+1} \cap B_{n+1} \cap \Gamma = C_{n+1} \cap \Gamma.$$

また，

$$C_{n+1}^c \cap B_{n+1} \cap \Gamma = (B_{n+1} - C_{n+1}) \cap \Gamma = B_n \cap \Gamma$$

である．このことを踏まえて (6.6) を書き換えると，



$$\mu^*(B_{n+1} \cap \Gamma) = \mu^*(C_{n+1} \cap \Gamma) + \mu^*(B_n \cap \Gamma).$$

以上まとめると，

$$\begin{aligned}
\mu^*(B_{n+1} \cap \Gamma) &= \mu^*(C_{n+1} \cap \Gamma) + \mu^*(B_n \cap \Gamma) \\
&\geq \mu^*(C_{n+1} \cap \Gamma) + \sum_{i=1}^{n} \mu^*(C_i \cap \Gamma) = \sum_{i=1}^{n+1} \mu^*(C_i \cap \Gamma)
\end{aligned}$$

となり，$k = n+1$ に対しても (6.5) が成り立つことがわかった．ここで，上の不等式で，帰納法の仮定を用いた．よって，すべての n について (6.6) が成立する．これにより $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$ が，従って $\mathcal{M}$ の σ-加法性が示された．

$\triangleright$ $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}}$ が (m1)(m2) を満たすこと:
(m1): $\mu(\varnothing) = 0$ は明らかなので
(m2): $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ $A_i \cap A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ $\quad\Longrightarrow\quad \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

のみを示す．そこで，$\{A_n\} \subset \mathcal{M}$ を $A_i \cap A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ を満たすものをとる．さらに，$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とおく．$A \in \mathcal{M}$ に注意しておく．このとき，先ほどと同じように

$$B_1 := C_1 := A_1, \quad B_n := \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \ \ C_n := B_n - B_{n-1}, \ n \geq 2$$

とおく． (6.3) より，任意の $\Gamma \subset X$ に対して

$$\mu^*(\Gamma) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(C_n \cap \Gamma) + \mu^*(A^c \cap \Gamma)$$

が成立する．ここで，$\Gamma = A$ とおくと，$C_n \subset A$ より，$C_n \cap \Gamma = C_n \cap A = C_n$． また，$A^c \cap \Gamma = A^c \cap A = \varnothing$. よって，

$$\mu^*(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(C_n).$$

ところで，$A_1, A_2, \ldots$ は互いに素であるので，実は $A_n = C_n$ である．よって，$\mu^*(A) = \mu(A)$, $\mu^*(A_n) = \mu(A_n)$ に注意すれば，上の不等式は

$$\mu(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

となる．逆の不等式は (C4) で成立しているので，結局

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

が示されたことになる． $\square$

問題 6.3. 上の定理において $A, B \in \mathcal{M}$ ならば，$A \cap B, A - B \in \mathcal{M}$ となることを実際に証明せよ．

以下，具体的に測度を構成，あるいは，拡張するための準備を行う．そのために，言葉を用意しておく．

空でない集合 X に対して，部分集合 $A, B \subset X$ が互いに素 $(A \cap B = \varnothing)$ であるとき，その和 $A \cup B$ を A と B の**直和**といい，特に $A \dot{+} B$ で書き表す：

$$A \cap B = \varnothing \quad\Longleftrightarrow\quad A \dot{+} B = A \cup B$$

従って，2 つの集合 A, B に対して $A \dot{+} B$ と書かれているときは，常に $A \cap B = \varnothing$ であり，かつ $A \dot{+} B = A \cup B$ を意味するものとする．

定理 6.4. **(‘前測度’ の拡張定理: E. Hopf の拡張定理)** X を空でない集合とし，$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ を X 上の有限加法族とする．μ^* をその上で定義された集合関数で，次の条件を満たすものとする：

(pm1) $0 \le \mu^*(A) \le \infty$

(pm2) $\mu^*(\varnothing) = 0$

(pm3) $\mu^*(A \dot{+} B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$

(pm4) 適当な集合列 $\{G_n\} \subset \mathcal{A}$ で，

$$G_n \subset G_{n+1}, \quad \mu^*(G_n) < \infty, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = X$$

を満たすものが存在する．

このとき，μ^* が $\sigma(\mathcal{A})$ 上の測度に拡張できるための必要十分条件は，μ^* が次の意味で $\mathcal{A}$ 上で**完全加法的**なことである：

『 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}, \quad A_i \cap A_j = \varnothing \ \ (i \ne j)$

$$\Longrightarrow \quad A_1 \dot{+} A_2 \dot{+} \cdots \dot{+} A_n \dot{+} \cdots =: \sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}, \quad \mu^*\Big(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \text{ 』} \tag{6.7}$$

が成り立つことである．しかもこの拡張は一意的である．

注意 6.2. (pm1)-(pm3) の条件は測度における可算加法性の代わりに有限加法性の条件が課されているので，測度の代わりに**前測度** (pre-measure) と呼ぶことにする．また，(pm4) は μ^* が σ-有限性を満たす条件である．

Proof of 定理 6.4: 拡張の一意性は，測度の一致性定理から出る．上の条件が拡張可能なために必要なことは明らかである．よって，後は十分性の証明である．そこで，任意の部分集合 $B \subset X$ に対して，集合関数を

$$\mu^{**}(B) := \inf\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) : \ \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A},\ B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \ \Big\}$$

と定める．これは，$B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ を満たすような $\mathcal{A}$ の集合列 $\{A_n\}$ のそれぞれについて，$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ を求めておき，そのような**すべて**の $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ の下限を $\mu^{**}(B)$ で表すのである．また，条件 (pm4) より，任意の $B \subset X$ に対して，

$$B \subset X = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$$

だから，B を被覆する $\mathcal{A}$ の集合列は必ず存在する． ところで，μ^{**} の定義の仕方から，μ^{**} が外測度となっていることは容易に分かる．従って， Carathéodory の定理により，μ^{**}-可測集合全体 $\mathcal{M}$ は σ-加法族で，$\mu := \mu^{**}|_{\mathcal{M}}$ は σ-有限な測度である．ゆえに，

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{M}, \quad \mu^*(A) = \mu(A), \quad A \in \mathcal{A}$$

が言えれば，$\mu|_{\sigma(\mathcal{A})}$ が求める拡張となっている[1]．

[1] $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ から，$\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}$ が出ることに注意せよ．

μ^* の仮定により，$\mathcal{A}$ 上で "完全加法的" であるが，更に劣可算加法的であること，

$$A \in \mathcal{A},\ A_n \in \mathcal{A},\ n = 1, 2, \dots,\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \Longrightarrow \quad \mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

は容易に分かる．実際，$A = \sum_{n=1}^{\infty} A \cap \Big(A_n - \bigcup_{i=0}^{n-1} A_i\Big)$ より，

$$\mu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*\Big(A \cap \Big(A_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\Big)\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

ただし，$A_0 = \varnothing$ と定める．これから，直ちにすべての $A \in \mathcal{A}$ に対して $\mu^*(A) \leq \mu^{**}(A)$ がわかる. また，

$$A = A \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots$$

から，

$$\mu^{**}(A) \leq \mu^*(A) + \mu^*(\varnothing) + \mu^*(\varnothing) + \cdots = \mu^*(A)$$

が成立することがわかる．よって，すべての $A \in \mathcal{A}$ に対して $\mu^{**}(A) = \mu^*(A)$.

次に，任意の $\Gamma \subset X$ に対して $\Gamma \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ を満たす $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ を取ると，任意の $B \in \mathcal{A}$ に対して

$$B \cap \Gamma \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (B \cap A_n), \quad 故に \quad \mu^{**}(B \cap \Gamma) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B \cap A_n),$$

$$B^c \cap \Gamma \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (B^c \cap A_n), \quad 故に \quad \mu^{**}(B^c \cap \Gamma) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B^c \cap A_n).$$

辺々それぞれ加えると，

$$\mu^{**}(B \cap \Gamma) + \mu^{**}(B^c \cap \Gamma) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\mu^*(B \cap A_n) + \mu^*(B^c \cap A_n)\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

右辺の下限をとると，

$$\mu^{**}(B \cap \Gamma) + \mu^{**}(B^c \cap \Gamma) \leq \mu^{**}(\Gamma).$$

これは $B \in \mathcal{M}$ を意味する．従って，$\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ となる．これで十分性が示された． □

問題 6.4. 上の定理の証明で，μ^{**} が外測度となっていることを実際に証明せよ．

問題 6.5. 上の定理において，$\mu^*(X) < \infty$ を満たすとき，条件 (6.7) は

$$\begin{aligned} &A_1 \supset A_2 \supset \cdots,\ A_n \in \mathcal{A},\ n = 1, 2, \dots,\ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing,\ \ \mu^*(A_1) < \infty \\ &\quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \mu^*(A_n) = 0 \end{aligned} \tag{6.8}$$

と同等であることを示せ．これはまた，

$$
\begin{aligned}
&A_1 \supset A_2 \supset \cdots,\ A_n \in \mathcal{A},\ n=1,2,\ldots,\quad \inf_{n\geq 1}\mu^*(A_n) > 0,\quad \mu^*(A_1) < \infty \\
&\qquad \Longrightarrow \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing
\end{aligned}
\tag{6.9}
$$

とも同等となることも示せ．この性質を μ^* の**共通点性**という．

6.3 Lebesgue(-Stieltjes) 測度の構成

前節までに得られた結果を用いて，Lebesgue(-Stieltjes) 測度 $\mathcal{L}_f^d$ の構成を実際に試みる． 見通しをよくするため，ここでは $d=1$ の場合のみを述べることにする．

f を右連続な単調増加関数とし，左半開区間 $I=(a,b]\ \ (a<b)$ に対して，

$$
\mathcal{L}_f^*(I) := \big|I\big|_f := \big|(a,b]\big|_f := f(b)-f(a), \quad -\infty \leq a < b \leq \infty \tag{6.10}
$$

と定義しよう[2]．但し，$(a,\infty]$ は (a,∞) の意味に取る．左半開区間の有限個の直和で表される集合（これを仮に**初等集合**と呼ぶことにする）の全体を $\mathcal{A}$ とすると，$\mathcal{A}$ は有限加法族である．

$$
A=\sum_{i=1}^{n} I_i, \quad I_i \text{ は左半開区間}
$$

に対して，

$$
\mathcal{L}_f^*(A) := \sum_{i=1}^{n} |I_i|_f \tag{6.11}
$$

と定義する．$\mathcal{A}$ の元 A を表示する方法は幾通りもあるが，上の値はその表示の仕方には無関係に確定する．従って，$\mathcal{A}$ において $\mathcal{L}_f^*$ が "完全加法性" (6.7) を満たすことを言えば，$\mathcal{L}_f^*$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ の上に σ-有限な測度に拡張されることがわかる．更に，その Lebesgue 拡大を $\mathcal{L}_f$ とすれば，これが 1 次元の (f に対応する)Lebesgue-Stieltjes 測度である．そこで $\mathcal{A}$ において，(6.7) が成り立つことを示そう．そのためには，

$$
I_1, I_2, I_3, \ldots,\ \text{を互いに素な半開区間の集合列で}\ \ I=\sum_{i=1}^{\infty} I_i \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L}_f^*(I)=\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|_f
$$

を示せば十分である．以下それを示すために幾つか補題を用意する．また，特に断らない限り I や I_i 等の記号は左半開区間を表すものとする．

補題 6.2. $I \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_i$ であれば，

$$
|I|_f \leq \sum_{i=1}^{n} |I_i|_f.
$$

[2] $f(x)=x$ とおくと，対応する測度はまさに (1 次元) Lebesgue 測度である

Proof: それぞれの半開区間を $I=(a,b],\ I_i=(a_i,b_i],\ i=1,2,\dots,n$ とする．いま，$\ell\in\mathbb{N}$ を

$$\ell>\max\{|I|,|I_1|,|I_2|,\dots,|I_n|\}$$

を満たすようにとる．ただし，$|I|$ は区間 $I=(a,b]$ の長さ $b-a$ を表す．また，m を

$$\frac{m}{\ell}\in I,\quad \text{すなわち}\quad a<\frac{m}{\ell}\le b$$

となるような整数とし，そのような $\frac{m}{\ell}$ についての $f((m+1)/\ell)-f(m/\ell)$ の和を N で表す：

$$N:=\sum_{a<m/\ell\le b}\Big(f(\frac{m+1}{\ell})-f(\frac{m}{\ell})\Big)$$

同様に，

$$N_i:=\sum_{a_i<m/\ell\le b_i}\Big(f(\frac{m+1}{\ell})-f(\frac{m}{\ell})\Big)$$

とおく．すると明らかに，

$$N\le N_1+N_2+\cdots+N_n$$

を満たすことがわかる．実際，$m/\ell\in I\subset\bigcup_{i=1}^n I_i$ ならば，適当な $i=1,2,\dots,n$ に対して，$m/\ell\in I_i$ となるから，そのような m/ℓ は必ず N_i の中で和は取られている．

今，$p,q\in\mathbb{N}$ を

$$\frac{p}{\ell}<a\le\frac{p+1}{\ell},\quad \frac{q}{\ell}\le b<\frac{q+1}{\ell}$$

を満たすように取る．また，$N=f((q+1)/\ell)-f((p+1)/\ell)$ であることに注意しておくと，f の単調性から

$$f(b)-f(a+1/\ell)\le N\le f(b+1/\ell)-f(a) \tag{6.12}$$

となる．同じように考えると，

$$f(b_i)-f(a_i+1/\ell)\le N_i\le f(b_i+1/\ell)-f(a_i). \tag{6.13}$$

よって，

$$f(b)-f(a+1/\ell)\le\sum_{i=1}^n\Big(f(b_i+1/\ell)-f(a_i)\Big)$$

となる．ここで，$\ell\to\infty$ とすれば，f の右連続性により

$$|I|_f=f(b)-f(a)\le\sum_{i=1}^n\Big(f(b_i)-f(a_i)\Big)=\sum_{i=1}^n\big|I_i\big|_f.$$

□

補題 6.3. $I_1,I_2,\dots,I_n$ が互いに素な半開区間で，$\displaystyle\bigcup_{i=1}^n I_i\subset I$ とすれば，

$$\sum_{i=1}^n\big|I_i\big|_f\le|I|_f.$$

Proof: 今述べた補題の証明のときと同じ記号を使うことにすれば，I_i が互いに素であることから

$$N_1 + N_2 + \cdots N_n \leq N$$

であることがわかる．また，(6.12)，(6.13) より，

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(f(b_i) - f(a_i + 1/\ell)\Big) < f(b + 1/\ell) - f(a).$$

よって，$\ell \to \infty$ とすれば，再び f の右連続性により

$$\sum_{i=1}^{n}\big|I_i\big|_f = \sum_{i=1}^{n}\big(f(b_i) - f(a_i)\big) \leq f(b) - f(a) = |I|_f.$$

□

上の二つの補題を組み合わせることにより，次の命題が示される：

命題 6.2. $I_1, I_2, \ldots, I_n$ が互いに素な半開区間の列で，$I = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$ ならば，

$$|I|_f = \sum_{i=1}^{n} |I_i|_f$$

を満たす．

さらに

命題 6.3. $I \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ ならば，

$$|I|_f \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|_f.$$

Proof: $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i|_f < \infty$ のときに示せば十分である． いま，$I = (a, b],\ I_i = (a_i, b_i]\ (i = 1, 2, \ldots)$ とする．次に $\varepsilon > 0$ を任意にとると，f の右連続性及び単調増加性により，$\eta > 0$ および $\eta_i > 0$ を

$$J = (a + \eta, b], \quad J^a = [a + \eta, b], \quad J_i = (a_i, b_i + \eta_i], \quad \mathring{J}_i = (a_i, b_i + \eta_i)$$

としたとき，

$$0 \leq |I|_f - |J|_f = (f(b) - f(a)) - (f(b) - f(a + \eta)) = f(a + \eta) - f(a) < \varepsilon/2,$$

$$0 \leq |J_i|_f - |I_i|_f = (f(b_i + \eta_i) - f(a_i)) - (f(b_i) - f(a_i)) = f(b_i + \eta_i) - f(b_i) < \varepsilon/2^{i+1}$$

となるように取ることができる．一方，

$$J^a = [a+\eta, b] \subset (a,b] = I \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i = \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i] \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i+\eta_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathring{J}_i$$

となる．ここで J^a は有界閉集合, 各 $\mathring{J}_i$ は開集合である．故に，Borel-Lebesgue の被覆定理により，有限個の $\mathring{J}_{i(1)}$，$\mathring{J}_{i(2)}, \ldots, \mathring{J}_{i(k)}$ をうまく選んで

$$J^a \subset \mathring{J}_{i(1)} \cup \mathring{J}_{i(2)} \cup \cdots \cup \mathring{J}_{i(k)},$$

すなわち，

$$J \left(\subset J^a\right) \subset \mathring{J}_{i(1)} \cup \mathring{J}_{i(2)} \cup \cdots \cup \mathring{J}_{i(k)}$$

とできる．よって補題 6.2 により，

$$|J|_f \leq |J_{i(1)}|_f + |J_{i(2)}|_f + \cdots + |J_{i(k)}|_f \leq \sum_{i=1}^{\infty} \big|J_i\big|_f.$$

ところで，

$$0 < |I|_f - |J|_f = \eta < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 < |J_i|_f - |I_i|_f = \eta_i < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
|I|_f < |J|_f + \frac{\varepsilon}{2} &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |J_i|_f + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \sum_{i=1}^{\infty}\Big(|I_i|_f + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\Big) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|_f + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} + \frac{\varepsilon}{2} = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|_f + \varepsilon,
\end{aligned}$$

故に，$|I|_f < \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|_f + \varepsilon$. よって，$|I| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|_f$. □

命題 6.4. $I_1, I_2, I_3, \ldots$ を互いに素な半開区間の集合列で $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ とすると，

$$|I|_f = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|_f$$

である．

Proof: 各 $n \in \mathbb{N}$ について，$I \supset \bigcup_{i=1}^{n} I_i$ であるから，補題 6.3 により，

$$|I|_f \geq \sum_{i=1}^{n} |I_i|_f.$$

上の左辺は n に無関係だから，$n \to \infty$ として

$$|I|_f \geq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|_f$$

が出る．一方，今示した命題 6.3 より逆の不等式は明らかだから，

$$|I|_f = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|_f$$

となる． □

以上より $\mathcal{A}$ 上で $\mathcal{L}_f^*$ (実際は，$|\cdot|_f$) が "完全加法性" をもつことがわわかった． これと，測度の拡張定理 (定理 6.4) を組み合わせることにより，次の (1-次元)Lebesgue-Stieltjes 測度の存在定理が得られる：

定理 6.5. $\mathcal{A}$ を左半開区間 $(a,b]$ $(-\infty < a < b \leq \infty)$ の有限個の直和で表される初等集合の全体とする．このとき，

$$\mathcal{L}_f^{**}(B) := \inf\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}_f^*(A_n) : \{A_n\} \subset \mathcal{A},\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset B\Big\}, \quad B \subset \mathbb{R}$$

と定めると，$\mathcal{L}_f^{**}$ は前測度の条件 (pm1)-(pm4) を満たし，さらに $\mathcal{A}$ 上で (6.7) を満たす．よって，$\mathcal{L}_f^{**}$-可測な集合全体を $\mathfrak{L}_f(\mathbb{R})$ と表し，$\mathcal{L}_f^{**}$ を $\mathfrak{L}_f(\mathbb{R})$ に制限したものを $\mathcal{L}_f$ と表すと，$\mathcal{L}_f$ は $\mathfrak{L}_f(\mathbb{R})$ 上の σ-有限な測度となる．これを f により誘導される Lebesgue-Stieltjes 測度という．

注意 6.3. 上の定理において，f が変われば $\mathfrak{L}_f(\mathbb{R})$ は，一般には変化する．しかしながら，どの f に対しても，作り方から $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathfrak{L}_f(\mathbb{R})$ は分かることから，

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{L}_f(\mathbb{R})$$

となる．従って，$\mathcal{L}_f$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上の σ-有限な測度にもなる．このことから，Lebesgue-Stieltjes 測度に基づいた積分論を展開するに当たっては，主に Borel 集合族 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ に制限して考えることが多い．

上の定理において，特に $f(x) = x$ の場合の測度：

$$\mathcal{L}(I) := |I| := |I|_f = b - a, \quad \forall A = I = (a,b]\ (-\infty < a < b < \infty)$$

が，我々が本来考えたかったものである．この $\mathcal{L}$ を 1 次元 Lebesgue 測度，$\mathfrak{L}(\mathbb{R})$ の元を Lebesgue 可測集合と呼ぶ.

以下，Lebesgue 外測度と開集合との関わりを見ていこう．

定理 6.6. A を任意の $\mathbb{R}$ の（$\mathcal{L}$-可測とは限らない）部分集合とする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$A \subset G, \quad \mathcal{L}^{**}(G) \leq \mathcal{L}^{**}(A) + \varepsilon$$

を満たすような適当な開集合 G が存在する．

Proof: 外測度の定義により，$\varepsilon > 0$ に対して，

$$\mathcal{L}^{**}(A) \le \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| \le \mathcal{L}^{**}(A) + \varepsilon/2$$

となるような A の半開区間による被覆 $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ が存在する．いま，$I_j = (a_j, b_j]$, $j = 1, 2, \ldots$ とし，各 j に対して，開区間を $J_j = \bigl(a_j, b_j + \varepsilon/2^{j+1}\bigr)$ のように定義すると，

$$I_j \subset J_j, \quad |J_j| = |I_i| + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$$

を満たす．このとき，$G = \bigcup_{j=1}^{\infty} J_j$ とおくと，G は, 明らかに $A \subset G$ を満たす開集合であり，また

$$\mathcal{L}^{**}(G) \le \sum_{j=1}^{\infty} |J_j| = \sum_{j=1}^{\infty} \Bigl(|I_j| + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}\Bigr) \le \mathcal{L}^{**}(A) + \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \mathcal{L}^{**}(A) + \varepsilon$$

となることから，定理が示された． □

この定理により，次の外測度の特徴付けが分かる：

系 6.1. $A \subset \mathbb{R}$ を任意の集合とすると，

$$\mathcal{L}^{**}(A) = \inf\Bigl\{\mathcal{L}^{**}(G) : \ G \text{ は } \mathbb{R} \text{ の開集合であり，} A \subset G\Bigr\}$$

Proof: 右辺の下限の値を L とおく．G を開集合で $G \supset A$ とすれば，外測度の定義により $\mathcal{L}^{**}(G) \ge \mathcal{L}^{**}(A)$ となるから，これで $G \supset A$ を満たす G に関する下限をとれば，$L \ge \mathcal{L}^{**}(A)$.

一方，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，先の定理を満たす開集合 G をとると，

$$\mathcal{L}^{**}(G) \le \mathcal{L}^{**}(A) + \varepsilon$$

である．L は，このような G の下限であるから

$$L \le \mathcal{L}^{**}(A) + \varepsilon$$

が成立する．よって，$\varepsilon \to 0$ とすれば逆の不等式が成立することがわかる． □

従って，開集合は Borel 可測集合である，従って Lebesgue 可測集合であるので，A を特に Lebesgue 可測集合に限れば，

$$\mathcal{L}(A) = \inf\Bigl\{\mathcal{L}(G) : \ G \text{ は } \mathbb{R} \text{ の開集合であり，} A \subset G\Bigr\}$$

という性質をみたす．このような性質，すなわち，それを含む開集合で測度が近似されるという性質をもつとき，測度は**外正則** (outer regular) であるという．

これから述べる Lebesgue 測度に関する性質は，以降の講義では直接は使わないので，必要に応じて参照のこと． 以下，“Lebesgue 測度 $\mathcal{L}$ に関してほとんど至るところ”，は簡単のため，単に “ほとんど至るところ” と言うことにする．

定理 6.7. (エゴロフ: Egorov) A を Lebesgue 可測集合とする．各 $n \geq 1$ について，f_n が A 上で Lebesgue 可測函数で，各点 $x \in A$ で $f_n(x)$ は有限な値 $f(x)$ に収束するものとする． このとき，$\mathcal{L}(A) < \infty$ であり，かつ f が A 上で有限な関数であれば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\tilde{A} \subset A, \quad \mathcal{L}(A - \tilde{A}) < \varepsilon$$

を満たす Lebesgue 可測集合 $\tilde{A}$ を選んで，$\tilde{A}$ 上で，f_n を f に一様収束させることが出来る．

Proof: 各 $n, m \in \mathbb{N}$ に対して

$$A(n,m) := \bigcap_{\ell=n}^{\infty} \Big\{ x \in A : |f_\ell(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \Big\}$$

とおくと，$A(n,m) \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ であり，m を固定する毎に $A(n,m)$ は n に関し単調非減少集合列である． しかも，A の各点 x において $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ であるから，

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(n,m).$$

故に，測度の単調収束定理 (定理 3.4) により

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}\big(A(n,m)\big) = \mathcal{L}(A).$$

一方，仮定 $\mathcal{L}(A) < \infty$ により， $\mathcal{L}\big(A(n,m)\big) < \infty$ より，命題 3.4(3) より

$$\mathcal{L}(A - A(n,m)) = \mathcal{L}(A) - \mathcal{L}(A(n,m))$$

とできる．よって，任意の $\varepsilon > 0$ 及び $m \in \mathbb{N}$ に対して，$n_m = n(\varepsilon, m) \in \mathbb{N}$ を $\mathcal{L}(A - A(n,m)) < \varepsilon/2^m$ となるように選ぶことが出来る．ここで，

$$\tilde{A} := \bigcap_{m=1}^{\infty} A(n_m, m)$$

とおけば，これが求めるものである．実際，

$$\mathcal{L}(A - \tilde{A}) = \mathcal{L}\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty} (A - A(n_m, m)) \Big) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{L}(A - A(n_m.m)) = \varepsilon$$

であり，かつ $x \in \tilde{A}$ ならば，全ての m について $n \geq n_m$ となるときは $x \in A(n_m, m)$ であるから，そのような x は $|f_n(x) - f(x)| < 1/m$ がなりたつ． □

定理 6.8. (ルジン: Lusin) $A \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ を $\mathcal{L}(A) < \infty$ をみたすものとし，f を A 上で定義された Lebesgue 可測関数とする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，適当に閉集合 $F \subset A$ を取って，$\mathcal{L}(A - F) < \varepsilon$ を満たし，かつ f が F 上で連続となるように出来る．

この定理を証明するために，一つ補題を用意する．

補題 6.4. A を Lebesgue 可測集合とする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，開集合 G を次のようにとることが出来る：

$$A \subset G, \qquad \mathcal{L}(G - A) \leq \varepsilon.$$

Proof: $\mathcal{L}(A) < \infty$ であれば，系 6.1 により，

$$A \subset G, \quad \mathcal{L}(G) \leq \mathcal{L}(A) + \varepsilon$$

を満たす開集合が存在する．よって，$\mathcal{L}(A) < \infty$ の仮定により

$$\mathcal{L}(G - A) = \mathcal{L}(G) - \mathcal{L}(A) \leq \varepsilon$$

となる．一般の可測集合 A に対しては，$A_n = A \cap [-n, n]$ とおくと，$\mathcal{L}(A_n) < \infty$ となるので，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$G_n \supset A_n, \quad \mathcal{L}(G_n - A_n) \leq \varepsilon/2^n$$

を満たす開集合 G_n が存在する．そこで，$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ とおくと，G は開集合であり，

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A, \quad \mathcal{L}(G - A) = \mathcal{L}\big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(G_n - A_n)\big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}(G_n - A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon/2^n = \varepsilon$$

となり，補題が示された． □

Proof(定理 6.8): f を $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ と分解して，$f^{\pm}$ それぞれに対して定理を証明すればよいから，始めから $f \geq 0$ として証明すれば十分である．そこでまず，$f \geq 0$ が Lebesgue 可測な単函数の場合を考える：

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot I_{A_k}(x).$$

ただし，$\alpha_k \geq 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ であり，また, $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ を満たすとする．各 A_i に対して，A_i^c は可測である．すると，今の補題により，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\mathcal{L}(G_i - A_i^c) + \varepsilon/n$ を満たす開集合 $G_i \supset A_i^c$ がとれる．ところで，$F_i = G_i^c$ は閉集合であり，さらに

$$F_i \subset A_i, \quad A_i - F_i = A_i \cap F_i^c = A_i \cap G_i = G_i \cap (A^c)^c = G_i - A^c$$

を満たすので，$\mathcal{L}(A_i - F_i) = m(G_i - A_i^c) \leq \varepsilon/n$ となる．一方，f は各 A_i 上定数なので，F_i 上連続となる．そこで，$F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ とおくと，f は F 上連続であり，さらに

$$\mathcal{L}(A - F) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}(A_i - F_i) \leq \varepsilon$$

を満たす．

次に，$f \geq 0$ が一般の可測函数である場合について示す．すると，定理 4.1 により可測な単函数列 $\{f_n\}$ が存在して，A の各点 x で $f_{n+1}(x) \geq f_n(x) \geq 0$ かつ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

となる．ところで，構成の仕方 (4.2) より，各 f_n は単函数であるから，閉集合 $F_n \subset A$ を，$\mathcal{L}(A-F_n) \le \varepsilon/(3\cdot 2^n)$ かつ f_n は F_n 上で連続であるように出来る．ここで，

$$F_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

とおけば，f_n は F_0 上で連続でありかつ

$$\mathcal{L}(A-F_0) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}(A-F_n) \le \varepsilon/3$$

である． 仮定より $\mathcal{L}(A) < \infty$ であるから $\mathcal{L}(F_0) < \infty$ となる．そこで，まず Egorov の定理を用いると，$\tilde{F}_0 \subset F_0$ かつ $\mathcal{L}(F-\tilde{F}_0) \le \varepsilon/3$ を満たす可測集合 $\tilde{F}_0$ を選んで，$\tilde{F}_0$ 上では f_n は f に一様収束させることが出来る．一方，さらに補題 6.4 により，$F \subset \tilde{F}_0$ かつ $\mathcal{L}(\tilde{F}_0 - F) < \varepsilon/3$ を満たす閉集合 F が存在する．よって，

$$\mathcal{L}(A-F) \le \mathcal{L}(A-F_0) + \mathcal{L}(F_0-\tilde{F}_0) + \mathcal{L}(\tilde{F}_0 - F) \le \varepsilon$$

であり，さらに f_n は閉集合 F 上で連続であり，さらに一様収束しているので，f は F 上連続関数の一様収束極限であるので連続である． □

問題 6.6. 補題 6.4 を用いて次を示せ： 任意の Lebesgue 可測集合 A に対して

$$\mathcal{L}(A) = \sup\bigl\{\mathcal{L}(F):\ F \subset A \text{ かつ } F \text{ は閉集合}\bigr\}.$$

補題 6.4 及び上の問題の結果を組み合わせると，次のことを示すことが出来る：

問題 6.7. A を任意の集合とし，$\mathcal{L}^*(A) < \infty$ とする．このとき，次の二つの条件は同値である：

(1) A は Lebesgue 可測集合である．

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，有界閉集合 K と開集合 G で，$K \subset A \subset G$ かつ $\mathcal{L}(G-K) < \varepsilon$ となるものが存在する．

例題 6.1. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{L})$ を完備化した測度空間と上で構成した測度空間 $(\mathbb{R}, \mathfrak{L}(\mathbb{R}), \mathcal{L})$ は一致する．

Proof: はじめに，$A \subset \mathbb{R}$ が外測度 $\mathcal{L}^{**}$ に関して可測集合であることの定義を思い出しておく：

$$\mathcal{L}^{**}(\Gamma) = \mathcal{L}^{**}(A\cap\Gamma) + \mathcal{L}^{**}(A^c \cap \Gamma), \quad \forall \Gamma \subset \mathbb{R}.$$

いま，$A \in \mathcal{L}$ が $\mathcal{L}(A) = 0$ を満たすとする．次に $B \subset A$ に対して，任意の $\Gamma \subset \mathbb{R}$ をとる．すると $B\cap\Gamma \subset A\cap\Gamma \subset A$ より，(C3) を用いると

$$\mathcal{L}^{**}(B\cap\Gamma) \le \mathcal{L}^{**}(A) = 0.$$

一方，$\Gamma \subset \Bigl(B\cap\Gamma\Bigr) \cup \Bigl(B^c\cap\Gamma\Bigr)$ から，

$$\mathcal{L}^{**}(\Gamma) \le \mathcal{L}^{**}(B\cap\Gamma) + \mathcal{L}^{**}(B^c\cap\Gamma) \le \mathcal{L}^{**}(B^c\cap\Gamma) \le \mathcal{L}^{**}(\Gamma)$$

となるので，結局

$$\mathcal{L}^{**}(\Gamma) = \mathcal{L}^{**}(B \cap \Gamma) + \mathcal{L}^{**}(B^c \cap \Gamma).$$

すなわち，B は $\mathcal{L}^{**}$-可測集合であることがわかる．しかも，$\mathcal{L}^{**}(B) = 0$ も成立する．

さて，**問題** 3.15 によると，$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{L})$ の完備化は

$$\mathcal{N} := \Big\{ B \subset \mathbb{R} :\ \exists N \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \text{s.t.} \quad B \subset N,\ \mathcal{L}(N) = 0 \Big\}$$

とおくとき，$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \cup \mathcal{N} = \big\{ A \cup N : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ N \in \mathcal{N} \big\}$ で与えられた．ところで $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ であり，また $\mathfrak{L}(\mathbb{R})$ が完備であることより，結局 $\mathfrak{L}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cup \mathcal{N}$ を示せば十分である．そこで，$A \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ とすると，Lebesgue 測度の内正則性 (**問題** 6.6) より，適当な閉集合の集合列 $\{F_n\}$ が存在して，

$$F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n \subset \cdots \subset A, \quad \mathcal{L}(A - G_n) < 1/n$$

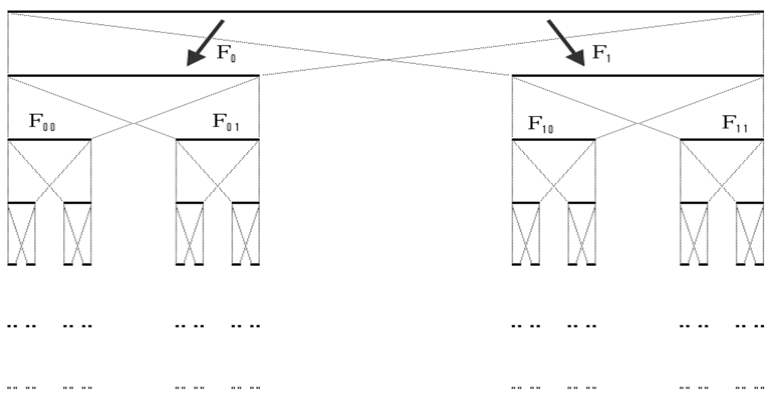
を満たすようにできる．$F := \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,\ N = A - F$ とおくと，$F \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ かつ $A = F \cup N$ であり，$\mathcal{L}(N) = 0$ となる．すなわち，$N \in \mathcal{N}$. 従って，$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cup \mathcal{N}$. □

次に，非常に特異な性質をもつ可測集合を紹介する．

例題 6.2. (Cantor **3 進集合**) $I = [0, 1]$ とする．まず，I を三等分して，中央の開区間 $(1/3, 2/3)$ を I から取り除く．そうして，区間 $[0, 1/3], [2/3, 1]$ をそれぞれ F_0, F_1 と表す．次に残った閉区間 F_0, F_1 のそれぞれを三等分して，それぞれの中央の開区間

$$\Big(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}\Big), \quad \Big(\frac{2}{3} + \frac{1}{3^2}, \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2}\Big)$$

を取り除き，残った区間をそれぞれ $F_{00}, F_{01}, F_{10}, F_{11}$ とおく．



今度は 4 つの区間のそれぞれを三等分して同じことを行う．これを繰り返していく．すなわち，$a_p = 0$ または 2 として

$$\Big(\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots + \frac{a_{p-1}}{3^{p-1}} + \frac{1}{3^p},\ \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots + \frac{a_{p-1}}{3^{p-1}} + \frac{2}{3^p}\Big) \quad (p = 1, 2, \ldots) \tag{6.14}$$

を I からすべて取り除くのである．これを G と表す．$F = I - G$ とおくと，$\mathcal{L}(F) = 1$ となる．すなわち，G は零集合となる．この集合は Cantor の **3 進集合**と呼ばれている．

以下 G が零集合となることを示す． 実際，第一段階で取り除く区間は $F_1 = (1/3, 2/3)$ で，第二段階では $F_{11}, F_{12}, F_{21}, F_{22}$ であり，第 p 段階では，取り除く区間は (6.14) である．従って，これを $F_{i_1 i_2 \cdots i_p}$ とおく．但し，$i_j = 0$ または 1 である．第 p 段階で取り除かれる区間は，2^{p-1} 個であるが，それら小区間の長さは 3^{-p} である．よって，この段階で取り除かれる区間の長さの総和は $(2/3)^{p-1} \cdot (1/3)$ である．従って，これらすべてを取り除く区間の総和は

$$\sum_{p=1}^{\infty} (2/3)^{p-1} \cdot (1/3) = \frac{1/3}{1 - 2/3} = 1$$

となる．よって，もとの $[0, 1]$ の長さが 1 であるので，取り除かれた部分 G の測度 $\mathcal{L}(G) = 0$ である．

次に取り除かれた部分である Cantor の 3 進集合 G は $[0, 1]$ と同値である，すなわち，全単射写像 $f : G \sim [0, 1]$ が存在することを示す．そのために，まず I の任意の元 x は，3 進数法を使うと，

$$x = \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \frac{\alpha_3}{3^3} + \cdots + \frac{\alpha_n}{3^n} + \cdots \quad (\alpha_n = 0, 1, 2)$$

の形に書くことが出来ることに注意する．これを簡単のため

$$x = 0.\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_n \cdots \quad (\alpha_n = 0, 1, 2) \tag{6.15}$$

と書くことにする．この記法に従うと，(6.14) は次のように書けることになる：

$$\big(0.\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_{p-1} 1,\ 0.\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_{p-1} 2\big). \tag{6.16}$$

但し，$n = 1, 2, \ldots, p-1$ に対し，$\alpha_n = 0$ または 2. ここで，もし $x \in F$ であれば，ある p 段階における取り除く区間 (6.16) のいずれかに属することになるので，適当な $p \in \mathbb{N}$ があって，$n = 1, 2, \ldots, p-1$ のいずれかに対して

$$0.\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_{n-1} 1 < x < 0.\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_{n-1} 2$$

となる． よって，(6.15) の記法において，この場合は $\alpha_n = 1$ でなければならない．すなわち，ある番号の係数の値として 1 を持たなければならない．逆に (6.15) の表記において，α_n の中に 1 に等しいものがあるとし，その内の最小の番号のものを α_n としてみる：

$$x = 0.\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1} 1 \alpha_{n+1} \alpha_{n+2} \cdots \alpha_{n+k} \cdots \quad (k = 1, 2, \ldots,\ \alpha_p = 0, 1;\ p = 1, 2, \ldots, n-1).$$

このとき，$\alpha_n + k = 0, k = 1, 2, \ldots$ であれば，$x = 0.\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1} 1$ は，(6.16) の左端点であるので，従って G の元である．この場合，$0, 2$ だけを使って

$$x = 0.\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1} 02222 \cdots$$

と書き直すことが出来る．また，$\alpha_{n+k} = 2, k = 1, 2, \cdots$ であれば，

$$x = 0.\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1} 1222 \cdots = 0.\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1} 2$$

は (6.16) の右端点に等しく，これもまた G の元で，0 と 2 だけを使って表示される．そのほかの場合は，

$$0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_{n-1}1 < x < 0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_{n-1}2$$

でなければならない．よって $x \in F$ でなければならない．

従って，どこかで 1 を使わざるを得ないような x は F の元であり，また F はそういう x だけからなる集合であるということがわかる．言い換えると，G の任意の元 x は，そのような表示を持たない．すなわち，3 進展開した際に，係数がすべて 0 または 2 をもつような表示できる元のみからなる集合である：

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\beta_j}{3^j}, \quad \beta_j = 0,\ 1.$$

次に，区間 $[0,1]$ を 2 進数展開で表せば，任意の $x \in [0,1]$ は，

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta_j}{2^j}, \quad \beta_j = 0, 1$$

と表せることになる．そこで，$f : G \to [0,1]$ を

$$f\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\beta_j}{3^j}\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta_j}{2^j}, \quad \beta_j = 0, 1$$

と定義することにすれば，これは全単射写像であることが分かる．これにより，G は $[0,1]$ と同値であることが分かり，零集合であるにもかかわらず“ 連続濃度 ”を持つことが分かる． □

6.4 Hausdorff 測度

この章の最後に応用上よく出てくる測度の一つである Hausdorff 測度について簡単に説明する．

$\alpha > 0$ とする．A を 任意の $\mathbb{R}^d$ の部分集合とする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$H_\alpha^{(\varepsilon)}(A) := \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \big(\delta(A_k)\big)^\alpha : \begin{array}{l} \text{各 } A_k \text{ は任意の } \mathbb{R}^d \text{の部分集合列で} \\ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \text{ かつ } \delta(A_k) < \varepsilon \text{ を満たす} \end{array} \right\}. \tag{6.17}$$

ただし，$\delta(A)$ は A の $\mathbb{R}^d$ における直径を表す：

$$\delta(A) = \sup\big\{|x - y| :\ x, y \in \mathbb{R}^d\big\}.$$

問題 6.8. $\delta > 0$ とする．このとき，任意の $A \subset \mathbb{R}^d$ について，$\varepsilon < \varepsilon'$ ならば，$H_\alpha^{(\varepsilon)}(A) \geq H_\alpha^{(\varepsilon')}(A)$ となることを示せ．

この問題により，次の極限が存在することがわかる：

$$H_\alpha(A) := \lim_{\varepsilon \to 0} H_\alpha^{(\varepsilon)}(A), \quad A \subset \mathbb{R}^d. \tag{6.18}$$

定理 6.9. 各 $\alpha > 0$ に対して， H_α は $\mathbb{R}^d$ 上の外測度となる．

Proof: $H_\alpha : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0, +\infty)$ が §6.2 における Carathéodory の外測度の条件 (C1)-(C4) を満たすことを示す．明らかに $H_\alpha(A) \geq 0$ であり，また $H_\alpha(\varnothing) = 0$ もわかる．

次に $A \subset B$ とする．$A_n \subset \mathbb{R}^d$ $(n = 1, 2, \ldots)$ で $\delta(A_n) < \varepsilon$ かつ $B \subset \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ を満たすものをとれば，$A \subset \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ でもあるので，

$$H_\alpha^{(\varepsilon)}(A) \leq \sum_{n=1}^\infty \bigl(\delta(A_n)\bigr)^\alpha$$

となる．右辺の下限をとれば $H_\alpha^{(\varepsilon)}(A) \leq H_\alpha^{(\varepsilon)}(B)$ がなりたつ．よって，$\varepsilon \to 0$ として $H_\alpha(A) \leq H_\alpha(B)$ が得られる．最後に $A_n \subset \mathbb{R}^d$ をとり，$A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ とおく．各 $\eta > 0$ 及び n に対して，$\{E_n^k\}_{k=1}^\infty \subset \mathscr{P}(\mathbb{R}^d)$ を

$$A_n \subset \bigcup_{k=1}^\infty E_n^k, \quad \delta(E_n^k) < \varepsilon, \quad \sum_{k=1}^\infty \bigl(\delta(E_n^k)\bigr)^\alpha < H_\alpha^{(\varepsilon)}(A_n) + \eta/2^k$$

となるようにとる．すると，$A \subset \bigcup_{n,k=1}^\infty E_n^k$ より，

$$H_\alpha^{(\varepsilon)}(A) \leq \sum_{k,n=1}^\infty \bigl(\delta(E_n^k)\bigr)^\alpha = \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty \bigl(\delta(E_n^k)\bigr)^\alpha < \sum_{n=1}^\infty \bigl(H_\alpha^{(\varepsilon)}(A_n) + \eta/2^k\bigr) = \sum_{n=1}^\infty H_\alpha^{(\varepsilon)}(A_n) + \eta$$

となる．$\eta \to 0$ として，

$$H_\alpha^{(\varepsilon)}(A) \leq \sum_{n=1}^\infty H_\alpha^{(\varepsilon)}(A_n)$$

が得られる．そうして $\varepsilon \to 0$ とすれば $H_\alpha(A) \leq \sum_{n=1}^\infty H_\alpha(A_n)$． 以上より，$H_\alpha$ は $\mathbb{R}^d$ 上の外測度であることがわかった． □

問題 6.9. $A \subset \mathbb{R}^d$ を有限集合とすると，任意の $\delta > 0$ に対して，$H_\alpha(A) = 0$ となることを示せ．

上の定理により，$\mathbb{R}^d$ 上に外測度が H_α が定義されたので，Carathéodory に従って可測集合を定義すると，その全体集合は完全加法族となる．そうして，その完全加法族に制限した外測度は測度となる．この測度を **$\boldsymbol{\alpha}$ 次元 Hausdorff 測度**といい，$\mathcal{H}_\alpha$ と書くことにする．また，Borel 集合族 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ の元は $\mathcal{H}_\alpha$-可測であることが Lebesgue 測度の場合と同じように示される．

Hausudorff 測度に関しては，次の様な著しい性質が知られている：

定理 6.10. $0 < \alpha < \beta$ とし，F を Borel 集合とする．もし，$\mathcal{H}_\alpha(F) < \infty$ であれば， $\mathcal{H}_\beta(F) = 0$ となる．また $\mathcal{H}_\beta(F) > 0$ ならば，$\mathcal{H}_\alpha(F) = \infty$.

Proof: A_n を $F \subset \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ かつ $\delta(A_n) < \varepsilon$ を満たすようにとる． このとき，

$$H_\beta^{(\varepsilon)}(F) \leq \sum_{n=1}^\infty \bigl(\delta(A_n)\bigr)^\beta = \sum_{n=1}^\infty \bigl(\delta(A_n)\bigr)^\alpha \cdot \bigl(\delta(A_n)\bigr)^{\beta-\alpha} < \varepsilon^{\beta-\alpha} \sum_{n=1}^\infty \bigl(\delta(A_n)\bigr)^\alpha.$$

よって，下限をとれば，$H_\beta^{(\varepsilon)}(F) \leq \varepsilon^{\beta-\alpha} H_\alpha^{(\varepsilon)}(F)$. ここで $H_\alpha(F) < \infty$ に注意して，$\varepsilon \to 0$ とすると $\mathcal{H}_\alpha(F) = H_\beta(F) = 0$. 後半は前半の対偶である． □

例題 6.3. $d=1$ とすると， $A\subset\mathbb{R}$ に対して $A_n\subset\mathbb{R}$ を $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ かつ $\delta(A_n)<\varepsilon$ とする．ここで，$\delta(A_n)<\varepsilon$ なので，A_n を含む最小の半開区間を I_n とすると，$\delta(A_n)=I_n$ である．よって，

$$H_{\alpha}^{(\varepsilon)}(A)=\inf\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|^{\alpha}$$

となる．よって，$\alpha=1$ であれば，これは Lebesgue 外測度に他ならない．すなわち，$\mathcal{H}_1=m$. しかし，一般には α が 2 以上の整数の場合は，α-次元 Hausdorff 測度は Lebesgue 測度とは一致するとは限らない．ちなみに，Cantor の 3 進集合を G とし，$\alpha=\ln 2/\ln 3$ とおくと，$0<\mathcal{H}_{\alpha}(G)<\infty$ となる．特に $\mathcal{H}_1(G)=\mathcal{L}(G)=0$ であった． $\square$

Chapter 7

直積測度とFubiniの定理

この章では，微積分で学んだ重積分の考え，更にはそれに伴う累次積分に相当する理論を学んでいく．特に重積分においては, 所謂 “縦線集合”，或いは “横線集合” と呼ばれる領域上の関数の重積分は，累次積分として，次元を一つ落とした積分を繰り返すことで求められた．しかしながら一般の領域では，その様な簡便な形では重積分は一般には求められなかった．ところが，Lebesgue 積分においては，極めて緩い条件のもとで，重積分が累次積分の繰り返しで求めることが出来るのである．このことを紹介するのが表題の **Fubini の定理**である． そのために，直積 σ-加法族，直積測度についての説明をはじめに行う．

7.1 直積 σ-加法族

$(X_1, \mathcal{A}_1),\ (X_2, \mathcal{A}_2), \dots, (X_n, \mathcal{A}_n)$ をそれぞれ可測空間とするとき，$X := X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 上の部分集合族として，$\{\mathcal{A}_i\}_{i=1}^n$ の直積集合族を考える：

$$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \cdots \times \mathcal{A}_n := \Big\{ A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n :\ A_i \in \mathcal{A}_i,\ i = 1, 2, \dots, n \Big\}. \tag{7.1}$$

このとき，これは一般には X 上の σ-加法族とはならない[1]．そこで，定理 3.1 により，(7.1) の生成する X 上の σ-加法族は存在するので，それを

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$$

で表し，$X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の**直積 $\boldsymbol{\sigma}$-加法族** (product $\boldsymbol{\sigma}$-field) と呼ぶ．

補題 7.1. X, Y を共に空でない集合とし，$\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X),\ \mathcal{V} \subset \mathcal{P}(Y)$ とする．また $\mathcal{U},\ \mathcal{V}$ の生成する X, Y 上の σ-加法族をそれぞれ $\mathcal{A},\ \mathcal{B}$ とおく：$\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{U}),\ \mathcal{B} := \sigma(\mathcal{V})$.

このとき，適当な単調増加な集合列 $\{U_i\} \subset \mathcal{U},\ \{V_j\} \subset \mathcal{V}$ で，$X = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i,\ Y = \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$ を満たすものが存在するならば，

$$\sigma(\mathcal{U} \times \mathcal{V}) = \sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B})\ \Big(= \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \Big)$$

が成り立つ．

[1] これは，$(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ を位相空間としたとき，$\big\{ A \times B :\ A \in \tau_X,\ B \in \tau_Y \big\}$ で定義される $X \times Y$ の部分集合族が，一般にはその上で位相とならないと言う事情に似ている．

Proof: 二つ目の等号は定義そのものであるので，一つ目の等号を示せば十分である．ところで，作り方から $\mathcal{U}\times\mathcal{V}\subset\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ より，$\sigma(\mathcal{U}\times\mathcal{V})\subset\sigma(\mathcal{A}\times\mathcal{B})$ は明らか．よって，逆の不等式のみを示す．そこで，

$$\Xi := \Big\{A\in\mathcal{A}:\ A\times G\in\sigma(\mathcal{U}\times\mathcal{V}),\ \forall G\in\mathcal{V}\Big\}$$

とおくと，Ξ は X 上の σ-加法族であることが分かる．実際，$A\in\Xi$ 及び $G\in\mathcal{V}$ を任意にとると，Ξ の作り方から，

$$X\times G=\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i\Big)\times G=\bigcup_{i=1}^{\infty}\big(U_i\times G\big)\in\sigma(\mathcal{U}\times\mathcal{V}).$$

また，$A^c\times G=\big(X\times G\big)-(A\times G)\in\sigma(\mathcal{U}\times\mathcal{V})$. 最後に，任意に $A_j\in\Xi_1,\ i=1,2,\ldots,\ G\in\mathcal{V}$ に対して，

$$\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Big)\times G=\bigcup_{i=1}^{\infty}\big(A_i\times G\big)\in\sigma(\mathcal{U}\times\mathcal{V}).$$

よって，Ξ は X 上の σ-加法族であることがわかった． ところで，作り方から$\mathcal{U}\subset\Xi\subset\mathcal{A}$ は明らかであり，さらに $\mathcal{A}=\sigma(\mathcal{U})$ の最小性により $\Xi=\mathcal{A}$ となる．よって，

$$\mathcal{A}\times\mathcal{V}\subset\sigma(\mathcal{U}\times\mathcal{V})$$

となる．一方，同様の議論を行うことにより，

$$\mathcal{U}\times\mathcal{B}\subset\sigma(\mathcal{U}\times\mathcal{V})$$

もわかる．これらのことから，$A\in\mathcal{A},B\in\mathcal{B}$ に対して

$$A\times B=(A\times Y)\cap(X\times B)=\bigcup_{\substack{i=1\\k=1}}^{\infty}\big(A\times V_k\big)\cap\big(U_i\times B\big)$$

であり，右辺の和を取る一つ一つは $\sigma\big(\mathcal{U}\times\mathcal{V}\big)$ の元であることから，結局 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}\subset\sigma\big(\mathcal{U}\times\mathcal{V}\big)$ がわかる．よって，$\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}\subset\sigma\big(\mathcal{U}\times\mathcal{V}\big)$ となる． □

ここでの目標は，μ を $(X,\mathcal{A})$ 上の σ-有限な測度，ν を $(Y,\mathcal{B})$ 上の σ-有限な測度とするとき，次を満たすような，$(X\times Y,\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$ 上の測度 ρ を構成することである：

$$\rho(A\times B):=\mu(A)\nu(B),\quad A\in\mathcal{A},\ B\in\mathcal{B}.$$

定理 7.1. $(X,\mathcal{A},\mu)$ および $(Y,\mathcal{B},\nu)$ をともに測度空間とし，$\mathcal{A}=\sigma(\mathcal{U}),\ \mathcal{B}=\sigma(\mathcal{V})$ を満たしているとする．また，次が成り立っていると仮定する：

- $\mathcal{U},\ \mathcal{V}$ はそれぞれ X,Y 上の乗法族 (6.1) で，共に $\varnothing\in\mathcal{U},\ \varnothing\in\mathcal{V}$ を満たすとする．
- $\mathcal{U},\ \mathcal{V}$ には，それぞれ適当な集合列 $\{U_i\}\subset\mathcal{U},\ \{V_j\}\subset\mathcal{V}$ が存在して，

$$U_i\subset U_{i+1},\ \bigcup_{i=1}^{\infty}U_i=X,\quad \mu(U_i)<\infty,\ \forall i=1,2,\ldots$$

$$V_j \subset V_{j+1},\ \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j = Y, \quad \nu(V_i) < \infty,\ \forall j = 1, 2, \ldots$$

を満たす．

このとき，次を満たすような測度 ρ が $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ 上に一意的に定まる：

$$\rho(A \times B) = \mu(A)\nu(B), \quad A \in \mathcal{U},\ B \in \mathcal{V}.$$

Proof: 上の補題により $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ は $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ を生成することに注意する．さらに，$\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ は $X \times Y$ 上の乗法族 (6.1) であることは明らかである．また，

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \bigl(U_i \times V_i\bigr) = X \times Y, \quad \rho(U_i \times V_i) = \mu(U_i)\nu(V_i) < \infty, \quad i = 1, 2, \ldots$$

となる．よって，これらのことと定理 6.2 により ρ の存在の一意性が出てくる．

存在性は E. Hopf の拡張定理 (前測度の拡張定理) により示すことができる．それを示すために，$\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ の互いに素な有限個の直和全体を $\mathcal{J}$ で表す．すると特に $\mathcal{J}$ は $X \times Y$ 上の有限加法族であり，$\mathcal{U} \times \mathcal{V} \subset \mathcal{J}$ より $\sigma(\mathcal{J}) = \sigma(\mathcal{U} \times \mathcal{V}) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ がわかる．$\mathcal{J}$ の元 F は

$$F = \sum_{i=1}^{k} \bigl(A_i \times B_i\bigr), \quad A_i \in \mathcal{U},\ B_i \in \mathcal{V}$$

の形に書ける．このような元に対して，

$$\rho^*(F) := \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i)\nu(B_i)$$

とおくと，ρ^* は $\mathcal{J}$ 上の前測度 (pre-measure) であり，さらには $\mathcal{J}$ 上で完全加法的であることが示される．よって，定理 6.4 により ρ^* は $\sigma(\mathcal{U} \times \mathcal{V}) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ 上の測度 ρ に拡張される．この ρ のことを μ, ν の直積測度と呼び $\mu \times \nu$ と書き表す：

$$\rho(F) = \mu \times \nu(F), \quad F \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}.$$

□

問題 7.1. 上の定理の証明において，$\mathcal{J}$ が $X \times Y$ 上の有限加法族となることを実際に示せ．

注意 7.1. 上の定理の証明において，ρ^* から ρ を構成する詳しい説明は，定理 6.4 の証明を $\mathcal{J}$ に置き換えてなぞるだけなので省略した．ここでは，その証明のアウトラインを述べておこう．

第一段: ρ^* が $\mathcal{J}$ 上において well-defined であること，すなわち，

$$F = \sum_{i=}^{k} A_i \times B_i = \sum_{j=1}^{\ell} A'_j \times B'_j \in \mathcal{J}$$

と二通りの表示があったとき，

$$\sum_{i=1}^{k} \mu(A_i)\nu(B_i) = \sum_{j=1}^{\ell} \mu(A'_i)\nu(B'_i) \tag{7.2}$$

であることを示す．そのためにまず

$$A \times B = \sum_{i=1}^{k} A_i \times B_i \quad \Longrightarrow \quad \mu(A)\nu(B) = \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i)\nu(B_i) \tag{7.3}$$

であることを示そう．$I_{A\times B}(x,y) = I_A(x)I_B(y)$ である．実際，$(x,y) \in A \times B$ ならば，$x \in A$ かつ $y \in B$ より，$I_{A\times B}(x,y) = 1$ ならば $I_A(x) = I_B(y) = 1$. また，$(x,y) \notin A \times B$ ならば，$x \notin A$ または $y \notin B$ より，$I_A(x) = 0$ または $I_B(y) = 0$. よって，$I_{A\times B}(x,y) = 0$ ならば， $I_A(x)I_B(y) = 0$. 以上で示せた．

一方，$i \neq j$ ならば $(A_i \times B_i) \cap (A_j \times B_j) = \varnothing$ より

$$I_{\sum_{i=1}^{k} A_i \times B_i}(x,y) = \sum_{i=1}^{k} I_{A_i \times B_i}(x,y) \sum_{i=1}^{k} I_{A_i}(x) I_{B_i}(y).$$

すなわち $I_A(x)I_B(y) = I_{A\times B}(x,y) = \sum_{i=1}^{k} I_{A_i}(x)I_{B_i}(y)$. よって，

$$\begin{aligned} \mu(A) \cdot I_B(y) &= \int_X I_A(x)I_B(y)\mu(dx) = \int_X \sum_{i=1}^{k} I_{A_i}(x)I_{B_i}(y)\mu(dx) \\ &= \sum_{i=1}^{k} I_{B_i}(y) \int_X I_{A_i}(x)\mu(dx) = \sum_{i=1}^{k} I_{B_i}(y)\mu(A_i). \end{aligned}$$

ここで，両辺を y に関して (ν で) 積分すると，

$$\begin{aligned} \mu(A)\nu(B) &= \int_Y \mu(A)I_B(y)\nu(dy) = \int_Y \sum_{i=1}^{k} I_{B_i}(y)\mu(A_i)\nu(dy) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i) \int_Y I_{B_i}(y)\nu(dy) = \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i)\nu(B_i) \end{aligned}$$

となり，(7.3) が示せた．次に (7.2) を示そう．

$$A_i \times B_i = \bigl(A_i \times B_i\bigr) \cap F = \bigl(A_i \times B_i\bigr) \cap \sum_{j=1}^{\ell} A'_j \times B'_j = \sum_{j=1}^{\ell} (A_i \cap A'_j) \times (B_i \cap B'_j)$$

より，ρ^* の定義から，

$$\sum_{i=1}^{k} \mu(A_i)\nu(B_i) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell} \mu(A_i \cap A'_j)\nu(B_i \cap B'_j).$$

同様にして

$$A'_j \times B'_j = \bigl(A'_j \times B'_j\bigr) \cap F = \bigl(A'_j \times B'_j\bigr) \cap \sum_{i=1}^{k} A_i \times B_i = \sum_{i=1}^{k} (A'_j \cap A_i) \times (B'_j \cap B_i)$$

より

$$\sum_{j=1}^{\ell} \mu(A'_j)\nu(B'_j) = \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{i=1}^{k} \mu(A'_j \cap A_i)\nu(B'_j \cap B_i).$$

よって，ρ^* が表示の仕方によらないこと，すなわち well-defined であることが示された．

第二段: $F_j = A_j \times B_j$, $F_i \cap F_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ かつ $\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j = A \times B$, $A \in \mathcal{U}$, $B \in \mathcal{V}$ の場合を考える．このとき，

$$\rho^*(A \times B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\nu(B_j)$$

を示す．すなわち

$$\mu(A)\nu(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\nu(B_j) \tag{7.4}$$

を示そう． 今，$\{A_j \times B_j\}_{j=1}^{\infty}$ は互いに素であるので，

$$I_A(x)I_B(y) = I_{A\times B}(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} I_{A_j\times B_j}(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} I_{A_j}(x)I_{B_j}(y).$$

よって，**定理** 5.2 **(項別積分)** を (ν に関して) 用いると

$$\begin{aligned} I_A(x)\nu(B) &= \int_Y I_A(x)I_B(y)\nu(dy) = \int_Y \sum_{j=1}^{\infty} I_{A_j}(x)I_{B_j}(y)\nu(dy) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} I_{A_j}(x)\int_Y I_{B_j}(y)\nu(dy) = \sum_{j=1}^{\infty} I_{A_j}(x)\nu(B_j) \end{aligned}$$

となるので，上の式に今度は**定理** 5.2 を (μ に関して) 用いると

$$\begin{aligned} \mu(A)\nu(B) &= \int_X I_A(x)\nu(B)\mu(dx) = \int_X \sum_{j=1}^{\infty} I_{A_j}(x)\nu(B_j)\mu(dx) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \nu(B_j)\int_X I_{A_j}(x)\mu(dx) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\nu(B_j). \end{aligned}$$

よって (7.4) が示せた．

第三段: ρ^* が $\mathcal{J}$ 上において完全加法的であること，すなわち，$\{F_n\}$ を互いに素な $\mathcal{J}$ における集合列とし，さらに $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{J}$ とする．このとき，

$$\rho^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho^*(F_n)$$

となることを示す．各 $F_n \in \mathcal{J}$ を $F_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{k_n} A_i^n \times B_i^n$ と表す．ところで，$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{J}$ より，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \sum_{j=1}^{M} A_j \times B_j$$

と表すことが出来る．今，

$$F_\ell = F_\ell \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\Big) = \Big(\sum_{i=1}^{k_\ell} A_i^\ell \times B_i^\ell\Big) \cap \Big(\sum_{j=1}^{M} A_j \times B_j\Big) = \sum_{i=1}^{k_\ell}\sum_{j=1}^{M}\Big(\big(A_i^\ell \cap A_j\big) \times \big(B_i^\ell \cap B_j\big)\Big)$$

であるから，ρ^* の定義により，

$$\rho^*(F_\ell) = \sum_{i=1}^{k_\ell}\sum_{j=1}^{M} \mu(A_i^\ell \cap A_j)\nu(B_i^\ell \cap B_j).$$

一方，

$$A_j \times B_j = \Bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\Bigr) \cap (A_j \times B_j) = \Bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{k_n} A_i^n \times B_i^n\Bigr) \cap (A_j \times B_j) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{k_n}\bigl(A_i^n \cap A_j\bigr) \times \bigl(B_i^n \cap B_j\bigr)$$

より，(7.4) から

$$\mu(A_j)\nu(B_j) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k_n} \mu(A_i^n \cap A_j)\nu(B_i^n \cap B_j).$$

よって，ρ^* の定義および正項級数の和の順序は交換可能であることを用いると，

$$\begin{aligned}
\rho^*\Bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\Bigr) \;=\; \rho^*\Bigl(\sum_{j=1}^{M} A_j \times B_j\Bigr) \;&=\; \sum_{j=1}^{M} \rho^*(A_j \times B_j) \;=\; \sum_{j=1}^{M} \mu(A_j)\nu(B_j) \\
&=\; \sum_{j=1}^{M}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k_n} \mu(A_i^n \cap A_j)\nu(B_i^n \cap B_j) \\
&=\; \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k_n}\sum_{j=1}^{M} \mu(A_i^n \cap A_j)\nu(B_i^n \cap B_j) \\
&=\; \sum_{n=1}^{\infty} \rho^*(F_n).
\end{aligned}$$

よって，ρ^* が $\mathcal{J}$ で完全加法的であることがわかった．ゆえに，ρ^{**} を ρ^* から作られる $X \times Y$ 上の Carathéodory の外測度とする： 任意の $G \subset X \times Y$ に対して，

$$\rho^{**}(G) = \inf\Bigl\{\sum_{n=1}^{\infty} \rho^*(F_n) : \ \{F_n\} \subset \mathcal{J},\ \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \supset G\Bigr\}$$

と定め，ρ^{**}-可測集合全体 $\mathcal{M}$ は σ-加法族で，$\rho = \rho^{**}|_{\mathcal{M}}$ は σ-有限な $X \times Y$ 上の測度となる．この測度が $\mu \times \nu$ である． □

7.2 Fubini の定理

$f(x,y), x, y \in \mathbb{R}$ を $I = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2)$ において連続な関数とするとき，微分積分学の講義において，重積分に対しては

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)dxdy = \int_{a_1}^{b_1}\Bigl(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)dy\Bigr)dx = \int_{a_2}^{b_2}\Bigl(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)dx\Bigr)dy$$

が成り立つと言うことを学んだと思う．これは重積分が累次積分を行ったものに等しいというものであるが，これに相当するのが，この節のタイトルである Fubini の定理である．第一項は，2 次元の積分であるのに対して，第二項と第三項はそれぞれ 1 次元の積分を二回実行したものである．

ここでは，一般の測度空間についてそのことを示していく．そこで，$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ をともに σ-有限な測度空間とし，$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ をその直積測度空間とする．それぞれ

σ-有限な測度空間なので，可測集合列 $\{U_i\} \subset \mathcal{A}$ 及び $\{V_j\} \subset \mathcal{B}$ で，

$$\begin{aligned} &U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_i \subset \cdots, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = X, \quad \mu(U_i) < \infty,\ i = 1, 2, \ldots \\ &V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_j \subset \cdots, \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j = Y, \quad \nu(U_j) < \infty,\ j = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{7.5}$$

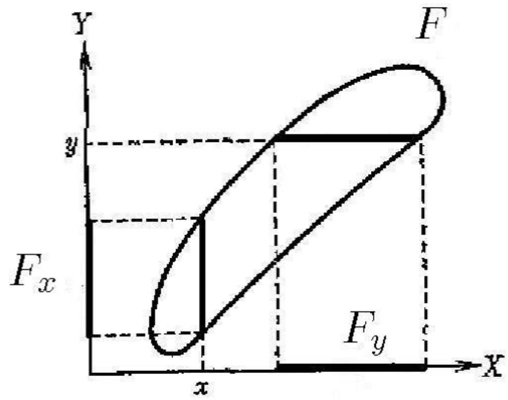
を満たすものが存在する．

定理 7.2. (Fubini の定理) $f = f(x, y)$ を $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-可測函数とする．このとき，$f$ が $\mu \times \nu$-可積分であれば，次が成り立つ：

$$\int_{X \times Y} f(x, y)\mu \times \nu(dx, dy) = \int_Y \Big(\int_X f(x, y)\mu(dx) \Big) \nu(dy) = \int_X \Big(\int_Y f(x, y)\nu(dy) \Big) \mu(dx).$$

この定理を示すために，補題を用意する．

切り口 (section)



$F \subset X \times Y$ とするとき，任意の $x \in X$ 及び $y \in Y$ に対して，

$$F_x := \{y \in Y : (x, y) \in F\} \subset Y,$$

$$F_y := \{x \in X : (x, y) \in F\} \subset X$$

とおき，それぞれ F の $\boldsymbol{x}$ **における切り口** (x-section of F)，F の $\boldsymbol{y}$ **における切り口** (y-section of F) と呼ぶことにする．

このとき，つぎが成り立つ．

補題 7.2. $F \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ とする．このとき，すべての $x \in X$ に対して，切り口 $F_x \subset Y$ は $\mathcal{B}$-可測集合であり，また，すべての $y \in Y$ に対して，切り口 $F_y \subset X$ は $\mathcal{A}$-可測集合となる．

Proof: $x \in X$ に対して，F_x が $\mathcal{B}$-可測集合となるような部分集合 $F \subset X \times Y$ の全体を $\mathcal{F}$ と表す：

$$\mathcal{F} := \big\{ F \subset X \times Y : \ F_x \in \mathcal{B} \big\}$$

$\mathcal{F} \supset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ を示せば $F_x \in \mathcal{B}$ であることが従うことがわかる．そこで $\mathcal{F} \supset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ を示そう．はじめに $F = A \times B$, $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ となる集合 $F \subset X \times Y$ は $\mathcal{F}$ の元であることに注意する．実際，$x \in A$ のときは，$(A \times B)_x = B \in \mathcal{B}$ であり，$x \notin A$ のときは $(A \times B)_x = \varnothing \in \mathcal{B}$ であるから．とくに $X \times Y \in \mathcal{F}$ である．また， 次の恒等式に注意する：

$$\big(F^c\big)_x = \big(F_x\big)^c, \quad \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \Big)_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} \big(F_n\big)_x. \tag{7.6}$$

これにより $\mathcal{F}$ は補集合を取る操作，及び可算和を取る操作に閉じていることが分かる．よって，$\mathcal{F}$ は $X\times Y$ 上の σ-加法族であることが分かる．さらに，$\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ を $\mathcal{F}$ は含むから，

$$\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}\subset\mathcal{F}$$

であることが分かる．同様に $y\in Y$ に対して，F_y が $\mathcal{A}$-可測となるような部分集合 $F\subset X\times Y$ 全体を $\mathcal{G}$ とおく：

$$\mathcal{G}:=\bigl\{F\subset X\times Y:\ F_y\in\mathcal{A}\bigr\}$$

すると，$\mathcal{F}$ の場合と同じように $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}\subset\mathcal{G}$ が示される． □

問題 7.2. 上の補題の証明における恒等式 (7.6) を示せ．

命題 7.1. (可測集合に対する Fubini の定理) 任意の $F\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ に対して，二つの関数

$$x\mapsto\nu(F_x),\qquad y\mapsto\mu(F_y)$$

はそれぞれ $\mathcal{A}$-可測函数，$\mathcal{B}$-可測函数であり，

$$\mu\times\nu(F)=\int_X\nu(F_x)\mu(dx)=\int_Y\mu(F_y)\nu(dy)$$

が成り立つ．

Proof: 先の補題により，$F\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ に対して，

$$F_x=\{y\in Y:(x,y)\in F\},\qquad F_y=\{x\in X:(x,y)\in F\},$$

はそれぞれ，$\mathcal{B}$-可測集合，$\mathcal{A}$-可測集合であることから，各 $x\in X,\ y\in Y$ に対して， $\mu(F_y)$ 及び $\nu(F_x)$ は意味を持つ．

ところで，(7.5) に対して，$Z_i=U_i\times V_i$ とおくと，$\{Z_i\}_{i=1}^{\infty}\subset\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ であり，かつ

$$Z_1\subset Z_2\subset\cdots\subset Z_i\subset\cdots,\quad \bigcup_{i=1}^{\infty}Z_i=X\times Y,\ \mu\times\nu(Z_i)=\mu(U_i)\nu(V_i)<\infty,\ \ i=1,2,\ldots$$

を満たすことに注意する． 各 $i\in\mathbb{N}$ に対して

$$\mathcal{F}_i:=\bigl\{F\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}:\ x\mapsto\nu\bigl((F\cap Z_i)_x\bigr)\ \text{は}\ \mathcal{A}\text{-可測函数}\bigr\}$$

とおく．$\mathcal{F}_i$ は $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ を含むことがわかる．実際，$A\times B\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ に対して，

$$\nu\bigl(((A\times B)\cap Z_i)_x\bigr)=\nu(B\cap V_i)I_{A\cap U_i}(x)$$

より $A\times B$ は $\mathcal{F}_i$ に属することが分かる．特に $X\times Y\in\mathcal{F}_i$ である．また，$F,G\in\mathcal{F}_i,\ F\subset G$ をとると，$F\cap Z_i\subset G\cap Z_i$ かつ $(F\cap Z_i)_x\subset(Z_i)_x\subset V_i$ より

$$\nu\bigl((F\cap Z_i)_x\bigr)\le\nu(V_i)<\infty$$

に注意すると，

$$\nu\big(((G-F)\cap Z_i)_x\big)=\nu\big((G\cap Z_i)_x\big)-\nu\big((F\cap Z_i)_x\big)$$

となる．右辺の二つの項は共に x の関数として $\mathcal{A}$-可測であるから，$G-F\in\mathcal{F}_i$ となる．更に，$\{F_n\}\subset\mathcal{F}_i$ を $X\times Y$ 上の単調増加な集合列とする．すると $(F_n\cap Z_i)_x$ も Y 上の単調増加な集合列となる．よって，**測度に対する単調収束定理** (定理 3.4) により，

$$\nu\Big(\big(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\cap Z_i\big)_x\Big)=\nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(F_n\cap Z_i)_x\Big)=\lim_{n\to\infty}\nu\big((F_n\cap Z_i)_x\big)$$

となる．また，各 n について $\nu\big((F_n\cap Z_i)_x\big)$ は $\mathcal{A}$-可測関数であるから，その極限関数も $\mathcal{A}$-可測となるので，$\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\in\mathcal{F}_i$ であることが分かる． よって，問題 6.1 により，$\mathcal{F}_i$ は $X\times Y$ 上の Dynkin 族となる．よって，$\mathcal{F}_i$ は $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ を含むから，

$$\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}=\delta(\mathcal{A}\times\mathcal{B})\subset\mathcal{F}_i\subset\mathcal{A}\otimes\mathcal{B},$$

従って，$\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}=\mathcal{F}_i$. 同様に

$$\mathcal{G}_i:=\big\{F\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}:\ y\mapsto\mu\big((F\cap Z_i)_y\big)\ \text{は}\,\mathcal{B}\text{-可測函数}\big\}$$

とおくと，$\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}=\mathcal{G}_i$ がわかる．従って，任意の $F\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ に対して

$$F_x=\Bigg(F\cap\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}Z_i\Big)\Bigg)_x=\bigcup_{i=1}^{\infty}(F\cap Z_i)_x,\quad (F\cap Z_i)_x\subset(F\cap Z_{i+1})_x,\quad i=1,2,\dots$$

に注意して，再び測度に対する単調収束定理を使うと，

$$\nu(F_x)=\lim_{i\to\infty}\nu\big((F\cap Z_i)_x\big)$$

が成り立つ．右辺の各項 $\nu\big((F\cap Z_i)_x\big)$ は $\mathcal{A}$-可測であったから，$x\mapsto\nu(F_x)$ も $\mathcal{A}$-可測であることが分かる．同じように，$y\mapsto\mu(F_y)$ は $\mathcal{B}$-可測であることが分かる． これで，命題の前半の証明が終了した．

次に，後半の主張を証明しよう．各 $i\in\mathbb{N}$ に対して，

$$\mathcal{H}_i:=\Big\{F\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}:\ \mu\times\nu(F\cap Z_i)=\int_X\nu\big((F\cap Z_i)_x\big)\mu(dx)=\int_Y\mu\big((F\cap Z_i)_y\big)\nu(dy)\Big\}$$

とおくと，$\mathcal{F}_i$ の場合と同じく，$\mathcal{H}_i$ は $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ を含む $X\times Y$ 上の Dynkin 族であることが示される（次の問題を見よ）． よって，

$$\mathcal{H}_i=\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$$

となることが分かる．以下証明を完成させよう．$F\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ を任意に取る．すると，

$$F_x=\bigcup_{i=1}^{\infty}(F\cap Z_i)_x,\quad F_y=\bigcup_{i=1}^{\infty}(F\cap Z_i)_y$$

であり，$(F\cap Z_i)_x$ は単調増大な $\mathcal{A}$-可測集合列, $(F\cap Z_i)_y$ は単調増大な $\mathcal{B}$-可測集合列である．また各 $i\in\mathbb{N}$ に対して

$$\mu\times\nu(F\cap Z_i)=\int_X \nu\bigl((F\cap Z_i)_x\bigr)\mu(dx)=\int_Y \mu\bigl((F\cap Z_i)_y\bigr)\nu(dy)$$

であり，右辺の二つの積分においては，単調収束定理が使えて，

$$\int_X \nu\bigl(F_x\bigr)\mu(dx)=\lim_{i\to\infty}\int_X \nu\bigl((F\cap Z_i)_x\bigr)\mu(dx)=\lim_{i\to\infty}\int_Y \mu\bigl((F\cap Z_i)_y\bigr)\nu(dy)=\int_Y \mu\bigl(F_y\bigr)\nu(dy)$$

第一項に関しては，測度 $\mu\times\nu$ に関する単調収束定理を用いると，

$$\mu\times\nu(F)=\lim_{i\to\infty}\mu\times\nu(F\cap Z_i).$$

これらを組み合わせると，命題の後半の主張が成り立つ：

$$\mu\times\nu(F)=\int_X \nu\bigl(F_x\bigr)\mu(dx)=\int_Y \mu\bigl(F_y\bigr)\nu(dy),\quad F\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}.$$

$\square$

問題 7.3. 上で $\mathcal{H}_i$ が $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ を含む $X\times Y$ 上の Dynkin 族であることを示せ．

上の命題を用いて，定理 7.2 を証明しよう．

Proof (of 定理 7.2): $f=f(x,y)$ を $X\times Y$ 上の $\mu\times\nu$-可積分な $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-可測函数とする．

ところで，$f=f^+-f^-$ と，f を正の部分と負の部分に分けて，$f^\pm$ に対して示すことが出来れば，Lebesgue 積分の線形性を用いることにより f においても成り立つことがわかるので，従って，最初から $f\geq 0$ として示すことにすれば十分である．よって，以下 $f=f(x,y)$ を正値な関数とする．

<u>第一段階：</u> (f が単函数の場合)

$$f(x,y)=\sum_{n=1}^N \alpha_i I_{F_n}(x,y),\quad F_n\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B},\ \alpha_n\geq 0,\ \ i=1,2,\ldots,N.$$

但し，$F_i\cap F_j=\varnothing(i\neq j)$, $\bigcup_{n=1}^N F_n=X\times Y$.

先に示した補題により，すべての $x\in X$ に対して，$(F_n)_x$ は $\mathcal{B}$-可測集合である．また，

$$g_n(x):=\int_Y I_{F_n}(x,y)\nu(dy)=\nu((F_n)_x)$$

とおくと，$x\mapsto g_n(x)$ は $\mathcal{A}$-可測函数であり，

$$\mu\times\nu(F_n)=\int_X g_n(x)\mu(dx),\quad n=1,2,\ldots,N$$

である．従って，すべての x について $Y=\bigcup_{n=1}^N(F_n)_x$ に注意すると，

$$g(x)=\int_Y f(x,y)\nu(dy)=\sum_{n=1}^N\alpha_n\int_Y I_{F_n}(x,y)\nu(dy)=\sum_{n=1}^N\alpha_n g_n(x)$$

は $\mathcal{A}$-可測函数となる．よって，

$$\begin{aligned}\int_X g(x)\mu(dx) &= \sum_{n=1}^N \alpha_n \int_X g_n(x)\mu(dx) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \int_X \nu((F_n)_x)\mu(dx)\\ &= \sum_{n=1}^N \alpha_n\, \mu\times\nu(F_n) = \int_{X\times Y} f(x,y)\mu\times\nu(dx,dy).\end{aligned}$$

<u>第二段階：</u> (f が一般の正値函数の場合) f を正値可測函数で，$\mu\times\nu$-可積分とする．このとき，測度空間 $(X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}, \mu\times\nu)$ に対する定理 4.1 を用いると，次を満たす $X\times Y$ 上の単調増加な単函数列 $\{\varphi_n\}$ が存在する：

$$0\le\varphi_1\le\varphi_2\le\cdots\le\varphi_n\le\cdots\le f, \quad \lim_{n\to\infty}\varphi_n = f$$

かつ

$$\lim_{n\to\infty}\int_{X\times Y}\varphi_n(x,y)\mu\times\nu(dx,dy) = \int_{X\times Y} f(x,y)\mu\times\nu(dx,dy).$$

すると**第一段階**の結果より，各 $n\in\mathbb{N}$ とすべての x について

$$g_n(x) = \int_Y \varphi_n(x,y)\nu(dy)$$

で定義される関数 g_n は $\mathcal{A}$-可測函数であり，

$$\int_{X\times Y}\varphi_n(x,y)\mu\times\nu(dx,dy) = \int_X g_n(x)\mu(dx) \tag{7.7}$$

が成り立つ．また，φ_n は単調増加函数列であるから，

$$0\le g_1\le g_2\le\cdots\le g_n\le\cdots$$

となる．従って，(7.7) の左辺に Lebesgue の収束定理，右辺に二回単調収束定理を，それぞれ適用すると，

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y)\mu\times\nu(dx,dy) &= \lim_{n\to\infty}\int_{X\times Y}\varphi_n(x,y)\mu\times\nu(dx,dy)\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_X g_n(x)\mu(dx) = \int_X \lim_{n\to\infty} g_n(x)\mu(dx)\\ &= \int_X \lim_{n\to\infty}\Big(\int_Y \varphi_n(x,y)\nu(dy)\Big)m(dx)\\ &= \int_X\Big(\int_Y f(x,y)\nu(dy)\Big)\mu(dx).\end{aligned} \tag{7.8}$$

さて， 今示したことを，x と y の役割を入れ替えることにより，以下のことも示されたことになる： すべての y に対して，

$$h(y) = \int_X f(x,y)\mu(dx)$$

が存在して，h は Y 上 ν-可積分な $\mathcal{B}$-可測函数であり，

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\mu\times\nu(dx,dy) = \int_Y h(y)\nu(dy) = \int_Y \Big(\int_X f(x,y)\mu(dx)\Big)\nu(dy) \tag{7.9}$$

が成り立つ．

故に，(7.8) 及び (7.9) により，Fubini の定理が示されたことになる． □

注意 7.2. 今述べた Fubini の定理は，直積空間 $X\times Y$ における積分を次元の一つ低い X 及び Y における積分を繰り返す（逐次積分，あるいは累次積分する）ことが出来るというものであったが，現実には，始めから $X\times Y$ 上の関数として，それが積分可能かどうかは分からない場合が多い．

一つの変数を固定して，1 変数の函数として見た場合には計算でき，計算した値をもう一つの変数の関数と見なして，それがまた可測函数となり，その積分を考えることが出来る．そうして，その結果が，自動的に $X\times Y$ 上の積分と一致するという著しい結果があるのである．このように，次元の低い方から積み重ねていって，結果として次元の高い空間の関数としての可積分性が出てくるという結果は，Tonelli の定理と言われているものであるが，証明をするために必要な概念がいくつかある．これらを述べる余裕がないので，結果だけをこの節の最後に述べておく．尤も，重積分が逐次積分と一致する結果をひとまとめにして，Fubini-Tonelli の定理と言うこともある．

定理 7.3. (Tonelli) $f = f(x,y)$ を測度空間 $(X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}, \mu\times\nu)$ 上の可測函数とする．このとき，$f(x,y)\geq 0,\ (x,y)\in X\times Y$ ならば，

$$x\mapsto f(x,y),\quad y\mapsto f(x,y)$$

はそれぞれ y,x を止めるごとに $\mathcal{A}$-可測函数, $\mathcal{B}$-可測函数となる．また，

$$g(y) = \int_X f(x,y)\mu(dx),\quad h(x) = \int_Y f(x,y)\nu(dy)$$

もそれぞれ $\mathcal{B}$-可測函数, $\mathcal{A}$-可測函数となり，

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\mu\times\nu(dx,dy) = \int_Y\Big(\int_X f(x,y)\mu(dx)\Big)\nu(dy) = \int_X\Big(\int_Y f(x,y)\nu(dy)\Big)\mu(dx)$$

を満たす．

問題 7.4. (First Borel-Cantelli Lemma) $(X,\mathcal{M},\mu)$ を一般の測度空間とする．$A_n\in\mathcal{M},\ n = 1,2,\ldots$ を可測集合列とする．このとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) < \infty$$

とすれば，

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$$

となることを示せ．

問題 7.5. f を 1 次元 Lebesgue 可測函数とし，積分可能とする．このとき，各 $\xi \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i\xi x} \mathcal{L}(dx)$$

と定義する．正確には **注意 5.3** でも述べたように，$e^{i\xi x} = \cos(\xi x) + i\sin(\xi x)$ に対して

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i\xi x} \mathcal{L}(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos(\xi x) \mathcal{L}(dx) + i \int_{\mathbb{R}} f(x) \sin(\xi x) \mathcal{L}(dx)$$

として定義される．これを f の Fourier **変換**と呼ぶ．このとき，$\widehat{f}$ は $\mathbb{R}$ 上の ($\mathbb{C}$ に値をとる) 連続函数となることを示せ．従って，$\widehat{f}$ は Borel 可測函数である．また，f, g を共に Lebesgue 可積分な函数であり，更に f^2, g^2 も共に Lebesgue 可積分函数とするとき，

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{g}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}$$

となることも示せ．ただし，$f * g$ は f と g の**畳み込み**（あるいは**合成積: convolution** とも呼ばれる）である：

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) \mathcal{L}(dy), \quad x \in \mathbb{R}.$$

問題 7.6. $a > 0$ とする．f は $f \cdot I_{(0,a)}$ が Lebesgue 積分可能な関数とする．このとき，$x \in (0, a)$ に対して，

$$g(x) = \int_{(x,a)} y \cdot f(y) \mathcal{L}(dy)$$

とおく．このとき，$g \cdot I_{(0,a)}$ は Lebesgue 積分であり，かつ

$$\int_{(0,a)} g(x) \mathcal{L}(dx) = \int_{(0,a)} f(x) \mathcal{L}(dx)$$

が成り立つことを示せ．

Chapter 8

変数変換 (Change of Variables)

この章は変数変換を扱う．

8.1 像測度 (image measures or push-forward measures)

$(E_1, \mathcal{E}_1)$, $(E_2, \mathcal{E}_2)$ をともに可測空間とし，$\varphi : E_1 \longrightarrow E_2$ を**可測写像** (measurable map) とする．すなわち，任意の $A \in \mathcal{E}_2$ に対して，$\varphi^{-1}(A) := \{x \in E_1 : f(x) \in A\} \in \mathcal{E}_1$ を満たすものとする．このとき，μ を $(E_1, \mathcal{E}_1)$ 上の測度とすると，

$$\mu_*\varphi(A) := (\mu^{-1}\varphi)(A) := \mu(\varphi^{-1}(A)), \quad A \in \mathcal{E}_2$$

と定めると，$\mu_*\varphi$ は $(E_2, \mathcal{E}_2)$ 上の測度となることがわかる．この測度を μ の φ による**推進測度** (pushforward measure of μ by φ)，あるいは**像測度** (image measure of μ by φ) と呼ぶ．

問題 8.1. 上で定義した $\mu_*\varphi$ が $(E_2, \mathcal{E}_2)$ 上の測度となることを証明せよ．

一般に可測空間 $(E, \mathcal{E})$ に測度が存在しなくても，別の測度空間から $(E, \mathcal{E})$ への可測写像が存在すれば，$(E, \mathcal{E})$ 上に測度を構築することができる．もちろん，初めから測度が存在していても，新たな測度を構成することもできるのである．

命題 8.1. $f : E_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ を非負値可測函数とするとき，

$$\int_{E_2} f(x)\mu_*\varphi(dx) = \int_{E_1} (f \circ \varphi)(x)\mu(dx) \tag{8.1}$$

が成り立つ．さらに，$f \in L^1(E_2, \mathcal{E}_2, \mu_*\varphi)$ であるための必要十分条件は $f \circ \varphi \in L^1(E_1, \mathcal{E}_1, \mu)$ となることである．特に (8.1) は任意の $f \in L^1(E_2, \mathcal{E}_2, \mu_*\varphi)$ に対して成立する．

Proof: 初めの主張だけを示せば十分である．そのために，f が指示函数 1_A, $A \in \mathcal{E}_2$ のときを考えると，(8.1) は成立することは明らかである：

$$\int_{E_2} 1_A(x)\mu_*\varphi(x) = \mu_*\varphi(A) = \int_{E_1} 1_{\varphi^{-1}(A)}(x)\mu(dx) = \int_{E_1} 1_A(\varphi(x))\mu(dx) = \int_{E_1} (1_A \circ \varphi)(x)\mu(dx).$$

従って，f が非負値単函数の場合にも成り立つことは，積分の線形性よりわかる．よって，単調収束定理 (MCT) により，$(E_2, \mathcal{E}_2)$ 上の任意の非負値可測函数 f に対して成立することがわかる

□

注意 8.1. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ を確率空間とする．$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ を確率変数とする．すなわち，X は $\mathcal{A}$-可測函数とする：任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して，$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq c\} \in \mathcal{A}$ を満たすとする．このとき，

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}$$

とおく．これを X の**分布関数** (distribution function of X) と呼ぶ．X を $(\Omega, \mathcal{A})$ から $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ への可測写像とみなすと，$\mathbb{P}$ の X による推進測度 $\mathbb{P}_* X$ が得られるが，この測度 $\mathbb{P}_* X$ を X の**法則** (law of X) と呼び，これを μ_X とあらわす：

$$\mu_X(A) = \mathbb{P}_* X(A) = \mathbb{P}(X \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

ところで，F_X は右連続な単調非減少函数であるから（次の問題を見よ），§6.3 により，F_X に対応する Lebesgue-Stieltjes 測度が構成できる：

$$\mathcal{L}_{F_X}\big((a, b]\big) = F_X(b) - F_X(a), \quad a < b.$$

問題 8.2. X の分布関数 F_X は次の性質が成り立つことを示せ．

(i) (単調非減少性) $x < y$ ならば，$F_X(x) \leq F_X(y)$

(ii) (右連続性) $\displaystyle\lim_{y \to x+0} F_X(y) = F_X(x)$

(iii) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1.$

問題 8.3. 上で定義した X の法則 μ_X と，F_X から構成される Lebesgue-Stieltjes 測度 $\mathcal{L}_X$ は一致することを示せ：

$$\mu_X(A) = \mathcal{L}_{F_X}(A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

8.2 Euclid 空間上の Lebesgue 測度と変数変換

前章の初めに，直積 σ-加法族を構成した．この節においては，特に $\mathbb{R}^d$ 上の Lebesgue 測度や，それが定義される Lebesgue 可測集合族 $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ 及び Borel 加法族 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ に焦点を当てて考えることにする．

実際，$\mathbb{R}^{d+\ell}$ 上には $(d+\ell)$-次元 Lebesgue 可測集合族 $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{d+\ell})$ 及び $(d+\ell)$-次元 Borel 加法族 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+\ell})$ が構成される．一方で，$\mathbb{R}^{d+\ell} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^\ell$ と考えると，§7.1 によって，$\mathbb{R}^{d+\ell}$ には $\mathbb{R}^d$ と $\mathbb{R}^\ell$ の直積 σ-加法族 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^\ell)$ を考えることもできる．応用上，これらの関係について調べておく必要がある． それに関しては，次が成り立つ．

定理 8.1. $(\mathbb{R}^{d+\ell}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^\ell), \mathcal{L}^d \times \mathcal{L}^\ell) = (\mathbb{R}^{d+\ell}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+\ell}), \mathcal{L}^{d+\ell})$

この定理を証明を始める前に，**命題 3.5.** を拡張した命題を一つ示しておく．

命題 8.2. (X, d_Y)，(Y, d_Y) をともに距離空間する，また， $\mathcal{B}(X), \mathcal{B}(Y)$ をそれぞれ X, Y の Borel 集合族とする．すなわち，$\mathcal{B}(X)$ は X の開集合を含む最小の σ-加法族であり，$\mathcal{B}(Y)$ は

Y の開集合を含む最小の σ-加法族である．このとき，$h : X \longrightarrow Y$ を連続関数とすると，A を Y の Borel 集合とすれば，$f^{-1}(A)$ は X の Borel 集合となる．ただし

$$f^{-1}(A) = \Big\{x \in X : \ f(x) \in A\Big\}$$

である．

Proof: 証明は**命題 3.5.** の証明を適切に X, Y の開集合に書き換えて行えばまったく同様に示すことができる． □

問題 8.4. 上の命題を実際に示せ.

Proof of Theorem 8.1.: 直積集合を $\mathcal{C}_{d+\ell} := \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^\ell) = \{E \times F : E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\ F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\ell)\}$ とおき，$\mathcal{C}_{d+\ell}$ 元の互いに交わらない有限個の和で表される集合全体を $\mathcal{A}_{d+\ell}$ とする：

$$\mathcal{A}_{d+\ell} = \Big\{\tilde{A} := \bigcup_{i=1}^n A_i \ \Big|\ \exists n \in \mathbb{N},\ E_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\ F_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\ell) \text{ s.t. } A_i = E_i \times F_i,\ \ A_i \cap A_j = \varnothing\ (i \neq j)\Big\}$$

すると．**補題 7.1** により $\sigma(\mathcal{A}_{d+\ell}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^\ell)$ である．はじめに $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+\ell}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^\ell)$ を示そう．

$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_{d+\ell}),\ \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_{d+\ell}) \in \mathbb{R}^{d+\ell}$ に対して，各 $i \in \{1, 2, \ldots, d+\ell\}$ について，$a_i < b_i$ であるとき，$(\!(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\!] := (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_{d+\ell}, b_{d+\ell}]$ と定め，

$$\mathcal{I}_{d+\ell} := \Big\{(\!(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\!] :\ \boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_{d+\ell}),\ \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_{d+\ell}) \in \mathbb{R}^{d+\ell},\ a_i < b_i\ (i = 1, 2, \ldots, d+\ell)\Big\}$$

とおくと，**定理 3.3.** により $\sigma(\mathcal{I}_{d+\ell}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+\ell})$ であった． また，$(\!(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\!] \in \mathcal{C}_{d+\ell}$ であるから，$\mathcal{I}_{d+\ell} \subset \mathcal{C}_{d+\ell} \subset \mathcal{A}_{d+\ell}$ が成り立つ．よって，$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+\ell}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^\ell)$ となる．

次に，座標関数 $\pi_d : \mathbb{R}^{d+\ell} \longrightarrow \mathbb{R}^d,\ \pi_\ell : \mathbb{R}^{d+\ell} \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ を考える：

$$\begin{cases} \pi_d(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_d), \\ \pi_\ell(x) = (x_{d+1}, x_{d+2}, \ldots, x_{d+\ell}), \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_d, x_{d+1}, \ldots, x_{d+\ell}) \in \mathbb{R}^{d+\ell}. \end{cases}$$

すると，π_d, π_ℓ ともに連続関数であることに注意しておく． すると，**命題 8.2** より，$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\pi_d^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+\ell})$ である． よって，

$$\pi_d^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+\ell}), \quad \pi_\ell^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^\ell)) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+\ell})$$

である． 一方，$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\ell)$ に対して，π_d, π_ℓ は座標関数であるから，

$$\pi_d^{-1}(A) = A \times \mathbb{R}^\ell \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+\ell}), \quad \pi_\ell^{-1}(B) = \mathbb{R}^d \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+\ell}).$$

よって，

$$A \times B = (A \times \mathbb{R}^\ell) \cap (\mathbb{R}^d \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+\ell})$$

が成り立つ．したがって，$\mathcal{C}_{d+\ell} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+\ell})$. また，各 $A \in \mathcal{A}_{d+\ell}$ に対しては，適当な $n \in \mathbb{N}$ および $E_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\ F_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\ell)$ が存在して，

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i, \quad A_i = E_i \times F_i, \quad A_i \cap A_j = \varnothing\ (i \neq j)$$

と表示されるが， $A_i \in \mathcal{C}_{d+\ell} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+\ell})$ より $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+\ell})$. すなわち，$\mathcal{A}_{d+\ell} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+\ell})$ がわかるので，$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^\ell) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+\ell})$.

各 $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\ell)$ に対して，$\mathcal{L}^{d+\ell}(E \times F) = \mathcal{L}^d(E) \times \mathcal{L}^\ell(F)$ より，**定理 6.2.** および**定理 7.1.** より，

$$\mathcal{L}^{d+\ell}(A) = (\mathcal{L}^d \times \mathcal{L}^\ell)(A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+\ell})$$

となることが示される． □

ここから，変数変換について考えていく．但し，時間の都合上，簡単な場合のみを取り扱うことにする．特に，**定理 3.5** の証明を行うことを目的とする．

$\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ を線形写像とすると，適当な d-次の正方行列 $A_\varphi = (a_{ij})_{1\le i,j\le d}$ が存在して，

$$\varphi(x) = A_\varphi x, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

となる．この行列を，φ の表現行列と呼んだ．一般に，φ が逆写像 φ^{-1} を持つことと A_φ が正則行列であることとは同値である．また，$\mathbb{R}^d$ 上の線形写像 $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ に対して，φ と ψ の合成 $\varphi\circ\psi$ は再び線形写像となるが，その表現行列は $A_\varphi A_\psi$ となる．特に，$\det\bigl(A_\varphi A_\psi\bigr) = \det\bigl(A_\varphi\bigr)\det\bigl(A_\psi\bigr)$ である．

定理 8.2. φ を $\mathbb{R}^d$ 上の線形写像とし，A_φ をその表現行列とし，A_φ は正則とする．

(1) $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ ならば，$\varphi(E) = \{\varphi x : x \in E\} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ であり，また

$$\mathcal{L}^d(\varphi(E)) = |\det(A_\varphi)|\mathcal{L}^d(E)$$

が成り立つ．

(2) f を $\mathbb{R}^d$ 上の Lebesgue-可測函数とする．このとき，合成写像 $f \circ \varphi$ も Lebesgue-可測函数である．更に，$f \in \mathsf{MF}_+(\mathbb{R}^d)$ または $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \mathcal{L}^d)$ ならば，

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = |\det(A)| \int_{\mathbb{R}^d} (f \circ \varphi)(x)dx. \tag{8.2}$$

ただし，$\mathcal{L}^d(dx)$ を dx と表した．

この定理を証明するために，次の補題から始めよう．

補題 8.1. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{L})$ を考える．

(i) 任意の y, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ に対して，

$$\mathcal{L}(A + y) = \mathcal{L}(A), \quad |\alpha|\mathcal{L}(\alpha^{-1}A) = \mathcal{L}(A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

が成り立つ．

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を可積分な可測函数，または非負値可測函数とする．このとき，任意の $y \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ に対して，

$$\int_{\mathbb{R}} f(x + y)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx, \qquad |\alpha| \int_{\mathbb{R}} f(\alpha x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx \tag{8.3}$$

が成り立つ．

Proof: (i): $\mathcal{I}=\{(a,b]:a<b\}$ とおくと，$I=(,b]$ に対して，

$$\mathcal{L}(I)=|I|=b-a=(b+y)-(a+y)=|(a+y,b+y]|=\mathcal{L}(I+y)$$

となる．また，$\alpha>0$ のときは，

$$\mathcal{L}(I)=|I|=b-a=\alpha\cdot(\alpha^{-1}b-\alpha^{-1}a)=\alpha|(\alpha^{-1}a,\alpha^{-1}b]|=|\alpha|\mathcal{L}(\alpha^{-1}I).$$

同様に $\alpha<0$ のときは，

$$\mathcal{L}(I)=|I|=b-a=(-\alpha)\cdot(\alpha^{-1}a-\alpha^{-1}b)=|\alpha|\cdot|[\alpha^{-1}b,\alpha^{-1}a)|=|\alpha|\mathcal{L}(\alpha^{-1}I).$$

となり，$\mathcal{I}$ の元に対しては (i) の性質は成立する．ところで，Lebesgue 測度の構成の仕方 (§6.3) から，任意の $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して，

$$\mathcal{L}(A)=\inf\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|:\ I_n\in\mathcal{I},\ A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\Big\}$$

であった．そこで，任意の $\{I_n\}\subset\mathcal{I}$ に対して，$A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$ を満たすものを取ると，$A+y\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n+y$ であり，さらに $I_n+y\in\mathcal{I}$ より，$\mathcal{L}(A+y)\le\sum_{n=1}^{\infty}|I_n+y|=\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|$ より，下限の定義により $\mathcal{L}(A+y)\le\mathcal{L}(A)$ がわかる．一方，$J_n\in\mathcal{I}$ で $A+y\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}J_n$ を満たすものを任意にとると， $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(J_n-y)$ であり，$J_n-y\in\mathcal{I}$ だから，

$$\mathcal{L}(A)\le\sum_{n=1}^{\infty}|J_n-y|=\sum_{n=1}^{\infty}|J_n|.$$

よって，下限の定義により，$\mathcal{L}(A)\le\mathcal{L}(A+y)$. ゆえに $\mathcal{L}(A+y)=\mathcal{L}(A)$ が任意の $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して成立する．二番目の性質についても同様に示すことができる．

(ii): $g(x)=f(x+h),\ h(x)=f(ax),\ x\in\mathbb{R}$ はともに Lebesgue 可測函数となることに注意しておく．はじめに， f を非負値単函数とし，そのような f に対して (8.3) が成り立つことを示そう．実際，$f(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i 1_{A_i}(x)$ とすると，

$$f(x+y)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i 1_{A_i}(x+y)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i 1_{A_i-y}(x),\quad f(ax)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i 1_{A_i}(ax)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i 1_{a^{-1}A_i}(x)$$

に注意すると， (i) の性質を用いると

$$\int_{\mathbb{R}}f(x+y)dx=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathcal{L}(A_i-y)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathcal{L}(A_i)=\int_{\mathbb{R}}f(x)dx$$

及び

$$|a|\int_{\mathbb{R}}f(ax)dx=|a|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathcal{L}(a^{-1}A_i)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathcal{L}(A_i)=\int_{\mathbb{R}}f(x)dx.$$

が成り立つことがわかる． よって，あとは単函数近似を行うことにより，任意の非負値可測函数に対しても (8.3) が成り立つことがわかる．一般の可積分な可測函数 f に対しては，正の部分 f^+ と負の部分 f^- に分けて考え，$f^\pm$ に対しては (8.3) が成り立つがわかるので，あとは Lebesgue 積分の線形性により f に対しても成り立つことが示される． $\square$

問題 8.5. 次を示せ．

(1) 上の補題の (i) の 2 番目の性質を証明せよ．

(2) 上の補題の函数 g, h がともに Lebesgue 可測函数となることを示せ．

補題 8.2. $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ を線形写像とし，A_φ をその表現行列とする．f を非負値，または可積分な Borel 可測函数とする．このとき，(8.2) が成り立つ．

Proof: φ は線形写像であるから，連続写像である．また，f は Borel 可測であるから，合成 $f \circ \varphi$ は Borel 函数となることがわかる．よって，Lebesgue 可測函数でもある．

いま，φ, ψ をともに線形写像，A_φ, A_ψ をそれぞれの表現行列とし，φ, ψ に対して (8.2) が成立しているとすると，合成写像 $\varphi \circ \psi$ に対しても成立することがわかる．実際，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx &= |\det(A_\varphi)| \int_{\mathbb{R}^d} (f \circ \varphi)(x)dx = |\det(A_\varphi)| \cdot |\det(A_\psi)| \int_{\mathbb{R}^d} \big((f \circ \varphi) \circ \psi\big)(x)dx \\ &= |\det(A_\varphi A_\psi)| \int_{\mathbb{R}^d} \big(f \circ (\varphi \circ \psi)\big)(x)dx.\end{aligned}$$

ここで，$A_\varphi A_\psi$ は合成写像 $\varphi \circ \psi$ の表現行列であるので，$\varphi \circ \psi$ についても (8.2) が成り立つことがわかった．

一般に，任意の線形写像 φ は，次の 3 つの線形写像 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ の適当な合成写像で表わされる： $x = {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ に対して，

$$\begin{aligned}\varphi_1(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_d) &= {}^t(x_1, \ldots, x_{j-1}, cx_j, x_{j+1}, \ldots, x_d) \\ &\qquad (c \neq 0, 1 \leq j \leq d) \\ \varphi_2(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_d) &= {}^t(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + cx_k, x_{j+1}, \ldots, x_d) \\ &\qquad (c \neq 0, 1 \leq j \leq d,\ k \neq j) \\ \varphi_3(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_k, \ldots, x_d) &= {}^t(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_j, \ldots, x_d) \\ &\qquad (1 \leq j < k \leq d)\end{aligned}$$

<u>すべての $\mathbb{R}^d$ 上の線形写像 φ</u> は適当な $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ の有限個の積により表わされるので，(8.2) を $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ に対して示せば，(8.2) がすべての線形写像 φ に対して成立することになる．

まず，f を非負値 Borel 可測函数とする．すると $f \circ \varphi_i$ $(i = 1, 2, 3)$ は Borel 可測だから，Lebesgue 可測函数である．いま，$f \geq 0$ であるから，$f \circ \varphi_i \geq 0$ $(i = 1, 2, 3)$ であることがわかる．$f \circ \varphi_3$ から考えよう． $1 \leq j < k \leq d$ に対して，

$$\int_{\mathbb{R}^d} (f \circ \varphi_3)(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi_3(x))dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_j, \ldots, x_d)dx.$$

Fubini の定理を用いて，(1 次元の Lebesgue 積分を) dx_k, dx_j の順に (2 回) 行い，残りの変数による $\mathbb{R}^{d-2}$ 上の積分の Lebesgue 測度を $d\hat{x}$ と表して，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} (f \circ \varphi_3)(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^{d-2}} \Big\{ \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_j, \ldots, x_d) d_k \Big) dx_j \Big\} d\hat{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-2}} \Big\{ \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_k, \ldots, x_d) d_j \Big) dx_k \Big\} d\hat{x}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Big(\text{添え字 } k \text{ と } j \text{ を入れ替える}\Big)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_k, \ldots, x_d)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx\\
&\Big(\text{Fubini の定理より}\Big)
\end{aligned}
$$

ところで，φ_3 の表現行列 A_{φ_3} に対して，$\det(A_{\varphi_3}) = -1$ であることをに注意すると $|\det(A_{\varphi_3})| = 1$. よって，(8.2) が φ_3 に対して成立することがわかった.

次に φ_1 を $c \neq 0,\ 1 \leq j \leq d$ の場合に考える.

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} (f \circ \varphi_1)(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi_1(x))dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x_1, \ldots, x_{j-1}, cx_j, x_{j+1}, \ldots, \ldots, x_d)dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, \ldots, x_{j-1}, cx_j, x_{j+1}, \ldots, \ldots, x_d)dx_j \Big) dx'
\end{aligned}
$$

ただし，$(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_d)$ 変数で $\mathbb{R}^{d-1}$ 上の Lebesgue 測度を dx' と表した．ここで，1 次元 Lebesgue 測度に関して，**補題 8.1.**(ii) を用いると，最後の式は

$$
|c|^{-1} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, \ldots, x_d)dx_j \Big) dx' = |c|^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx
$$

となる．一方，φ_1 の表現行列 A_{φ_1} に対しては $|\det(A_{\varphi_1})| = |c|$ より

$$
\int_{\mathbb{R}^d} (f \circ \varphi_1)(x)dx = |c|^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = |\det(A_{\varphi_1})|^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx.
$$

よって，(8.2) が φ_1 に対して成立することがわかった.

最後に φ_2 を $c \neq 0,\ 1 \leq j, k \leq d, j \neq k$ の場合を考える.

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} (f \circ \varphi_2)(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi_2(x))dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + cx_k, x_{j+1}, \ldots, \ldots, x_d)dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + cx_k, x_{j+1}, \ldots, \ldots, x_d)dx_j \Big) dx'.
\end{aligned}
$$

ここで，写像 $x_j \mapsto x_j + cx_k$ を考えると，これは単に $y = cx_k$ だけ平行移動したものを考えているだけである， よって，再び**補題 8.1**(ii) を適用すると，最後の式は

$$
\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, \ldots, x_d)dx_j \Big) dx' = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx
$$

となる．また，φ_2 の表現行列 A_{φ_2} に対しては $\det(A_{\varphi_1}) = 1$ だから，(8.2) が φ_2 に対して成立することがわかる.

f が可積分な Borel 可測函数の場合は，いつもと同じように正の部分 f^+ と負の部分 f^- に分けて考えるとよい.

□

Proof of Theorem 8.2.: (2) は**補題 8.4.** で示したので，以下 (1) のみを示す.

φ は連続関数であるので，$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ に対して $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ である．また，

$$
1_{\varphi(A)}(x) = 1_A(\varphi^{-1}(x)) = (1_A \circ \varphi^{-1})(x)
$$

に注意する．すると，φ の表現行列を A_φ とすると，φ^{-1} の表現行列は A_φ^{-1} であるから，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^d(\varphi(A)) &= \int_{\mathbb{R}^d} 1_{\varphi(A)}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} (1_A \circ \varphi^{-1})(x)dx = |\det(A_\varphi^{-1})|^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} 1_A(x)dx \\ &= |\det(A_\varphi)| \int_{\mathbb{R}^d} 1_A(x)dx = |\det(A_\varphi)|\mathcal{L}(A).\end{aligned}$$

一般の Lebesgue 可測集合 $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ に対しては，適当な $A' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ と null set N が存在して， $A = A' \cup N$ と書ける．すなわち，N に対して適当な $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ が存在して $\mathcal{L}(B) = 0,\ N \subset B$ とできる．A' 及び B に対しては (1) が示すことができる． また，

$$\mathcal{L}(\varphi(A')) = |\det(A_\varphi)|\mathcal{L}(A'), \quad \varphi(N) \subset \varphi(B), \quad \mathcal{L}(\varphi(B)) = |\det(A_\varphi)|\mathcal{L}(B) = 0$$

となることに注意する．すると，$\varphi(N)$ も null set である．また，$G = \varphi(A) \setminus \varphi(A')$ とおくと，

$$G = \varphi(A) \setminus \varphi(A') \subset \Big(\varphi(A') \cup \varphi(B)\Big) \setminus \varphi(A') \subset \varphi(B)$$

より，G は null set である．また，$\varphi(A) = \varphi(A') \cup G$ とかけるので，$\varphi(A)$ は $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ の元である．従って，

$$\mathcal{L}(\varphi(A)) = \mathcal{L}(\varphi(A')) = |\det(A_\varphi)|\mathcal{L}(A') = |\det(A_\varphi)|\mathcal{L}(A)$$

□

極座標変換 (polar coordinates)

$\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{R}^3$ における非線形な変換の重要な例として，**極座標変換**があげられる ($x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ または $x = r\sin\psi\cos\theta, y = r\sin\psi\sin\theta, z = r\cos\psi$).

実際問題としても，$\mathbb{R}^d$ 上の Lebesgue 積分を具体的に計算する際には，極座標変換は非常に重要な役割を果たすことがある．

まず，$S^{d-1} := \{x \in \mathbb{R}^d :\ |x| = 1\}$ を，d 次元単位球面を表すとする．$x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ の**極座標 (polar coordinates)** とは，組

$$r = |x| \in (0, \infty), \quad x' = \frac{x}{|x|} \in S^{d-1}$$

のことである．このとき，写像 $\varphi(x) = (r, x')$ は，$\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ から $(0,\infty) \times S^{d-1}$ への全単射な連続写像であり，その（連続な）逆写像は $\varphi^{-1}(r, x') = rx' \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ である．

このとき，φ による Lebesgue 測度 $\mathcal{L}^d$ の $(0,\infty) \times S^{d-1}$ 上の像測度を $\mathcal{L}_*$ と表す：

$$\mathcal{L}_*(A) = \mathcal{L}^d(\varphi^{-1}(A)), \quad A \in \mathcal{B}((0,\infty) \times S^{d-1}).$$

次に，$(0,\infty)$ 上の測度 $\rho = \rho_d$ を，$\rho(E) := \int_E r^{d-1}dr$ と定義する．

定理 8.3. $\mathcal{L}_* = \rho \times \sigma$ となるような S^{d-1} 上の Borel 測度 $\sigma = \sigma_d$ が一意的に存在する．さらに，f が $\mathbb{R}^d$ 上の非負値 Borel 函数であるか，または可積分な Borel 函数とすると，

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} f(rx')r^{d-1}\sigma(dx')dr \tag{8.4}$$

が成り立つ．

Proof: もし測度 σ が存在したとすると，(8.4) は，f が単函数 1_A のときに成立することは簡単にわかる．実際，$\mathcal{L}_* = \rho \times \sigma$ であるから，その測度の書き換えである：

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} 1_A(\varphi(x))\mathcal{L}^d(dx) &= \int_{(0,\infty)\times S^{d-1}} 1_A((r,x'))\mathcal{L}_*(dr,dx') \\ &= \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} 1_A(r,x')(\rho\times\sigma)(dr,dx') = \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} 1_A(r,x') r^{d-1}\sigma(dx')dr.\end{aligned}$$

あとは，積分の線形性と単調収束定理を組み合わせることにより，任意の非負値 Borel 函数 f に対して (8.4) が成立することはわかる．従って，後は，測度 $\sigma = \sigma_d$ の存在を示せば証明は終わる．

そのために，E を S^{d-1} の Borel 集合とし，$a > 0$ をとる．このとき

$$E_a := \varphi^{-1}\big((0,a]\times E\big) = \{rx' : 0 < r \le a,\ x' \in E\}$$

とおく．このとき，もし $f = 1_{E_1}$ に対して (8.4) が成立したとすると，

$$\mathcal{L}_*(E_1) = \int_0^1 \int_E r^{d-1}\sigma(dx')dr = \sigma(E)\int_0^1 r^{d-1}dr = \frac{\sigma(E)}{d}$$

となるので，$\sigma(E) = n\,\mathcal{L}_*(E_1)$ として σ を定義すればよいことがわかる．

そこで，$E \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ を一つ固定して，$\mathcal{A}_E$ を $(a,b]\times E$ の形を持つ有限個の互いに素な集合の和全体を表すとする．すると $\mathcal{A}_E$ は $(0,\infty)\times E$ 上の有限加法族であることがわかる．また，$\mathcal{A}_E$ は $(0,\infty)\times E$ 上の σ-加法族 $\mathcal{M}_E = \{A\times E :\ A \in \mathcal{B}(0,\infty)\}$ を生成する． 一方，上の計算によって $\mathcal{L}_* = \rho\times\sigma$ は $\mathcal{A}_E$ 上で成立している．従って，測度の一意性定理により， $\mathcal{M}_E$ 上で $\mathcal{L}_* = \rho\times\sigma$ となる．また， $\bigcup\{\mathcal{M}_E : E \in \mathcal{B}(S^{d-1})\}$ は $(0,\infty)\times S^{d-1}$ の '区間塊' の集合族であることがわかるので，改めて一意性定理を用いると，$(0,\infty)\times S^{d-1}$ 上の Borel 集合上で $\mathcal{L}_* = \rho\times\sigma$ となる．
□

注意 8.2. 上の定理に現れた S^{d-1} 上の測度 σ を S^{d-1} における**表面測度** (surface measure) と呼ぶ．

系 8.1. f を $\mathbb{R}^d$ 上の可測函数で，非負値であるかまたは可積分であるとする．また，適当な一変数関数 $g : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在して $f(x) = g(|x|),\ x \in \mathbb{R}^d$ を満たすものとする． このとき，

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \sigma(S^{d-1})\int_0^\infty g(r)r^{d-1}dr.$$

系 8.2. c, C を適当な正定数とし，$B = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \le c\}$ とおく．また， f は $\mathbb{R}^d$ 上の可測函数とする．このとき，以下のことが成立する：

(i) 適当な $a < d$ が存在して，$|f(x)| \le C|x|^{-a},\ x \in B$ が成り立つとすると，$\int_B |f(x)|dx < \infty$ である．一方，$|f(x)| \ge C|x|^{-d},\ x \in B$ とすると，$\int_B |f(x)|dx = \infty$ である．

(ii) 適当な $a > d$ が存在して，$|f(x)| \le C|x|^{-a},\ x \in B^c$ ならば，$\int_{B^c} |f(x)|dx < \infty$ である．しかしながら，$|f(x)| \ge C|x|^{-d},\ x \in B^c$ とすると $\int_{B^c} |f(x)|dx = \infty$ となる．

いか，具体的に $\sigma(S^{d-1})$ を求めてみよう．初めに，次の命題を示そう．

命題 8.3. $a > 0$ ならば，

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp\Big(-a|x|^2\Big)dx = \Big(\frac{\pi}{a}\Big)^{d/2}$$

Proof: $a > 0$ に対して， $f(x) = e^{-a|x|^2} = e^{-a\sum_{i=1}^d x_i^2} = \prod_{i=1}^d e^{-ax_i^2} > 0$ だから，Fubini の定理により

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp\Big(-a|x|^2\Big)dx = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^d e^{-ax_i^2}dx_1 \cdots dx_d = \prod_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}} e^{-ax_i^2}dx_i = \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-at^2}dt\Big)^d$$

であり，$\sqrt{a}t = s$ と変数変換を行えば，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}ds = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_0^{\infty} e^{-s^2}ds$$

だから，後は $\int_0^\infty e^{-s^2}ds$ を計算すればよい．しかし，これは広義積分によって，

$$\int_0^\infty e^{-s^2}ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

が導かれるから，

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp\Big(-a|x|^2\Big)dx = \Big(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\Big)^d = \Big(\frac{\pi}{a}\Big)^{d/2}$$

となる． □

問題 8.6. $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}/2$ を具体的に計算して求めよ．

命題 8.4. $\sigma(S^{d-1}) = \dfrac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$.

Proof: 系 8.1. により，

$$\pi^{d/2} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2}dx = \sigma(S^{d-1}) \int_0^\infty e^{-r^2}r^{d-1}dr$$

である．ここで，$r^2 = t$ とおくと，

$$\int_0^\infty r^{d-1}e^{-r^2}dr = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}\,t^{(d-2)/2}dt = \frac{1}{2}\Gamma(d/2).$$

□

系 8.3. $B = \{x \in \mathbb{R}^d :\ |x| < 1\}$ とおくと

$$\mathcal{L}^d(B) = \mathrm{vol}_d(B) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2+1)}$$

Proof: 系 8.1. を $f(x) = 1_B(x)$ に対して適用すると，

$$\mathcal{L}^d(B) = \sigma(S^{d-1})\int_0^\infty 1_{(0,1)}(r) r^{d-1} dr = \sigma(S^{d-1})\int_0^1 r^{d-1} dr = \frac{\sigma(S^{d-1})}{d} = \frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)}.$$

ここで，関係式 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),\ x > 0$ を使うと，

$$\mathcal{L}^d(B) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2+1)}$$

が出る．

□

問題 8.7. a, b を実数の定数とする．また，$f(x) = |x|^a \big|\log|x|\big|^b$ に対して，f が $\{x \in \mathbb{R}^d : |x| < 1/2\}$ において可積分となる a, b の条件を求めよ．同様に $\{x \in \mathbb{R}^d : |x| > 2\}$ において f が可積分となる a, b の条件を求めよ．

Chapter 9

加法的集合関数

この章の目的は，測度の分解定理と Radon-Nikodým の定理を証明することである．

9.1　絶対連続な測度

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする．また，$\mathcal{L}(X, \mathcal{M}, \mu)$ を μ-可積分な $\mathcal{M}$-可測函数全体を表すことにする．

補題 9.1. $A \in \mathcal{M}$ を $\mu(A) = 0$ とすると，任意の $f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{M}, \mu)$ に対して

$$\int_A f(x)\mu(dx) = \int_X f(x) I_A(x)\mu(dx) = 0$$

となる．

Proof: $f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{M}, \mu)$ を $f = f^+ - f^-$ と正の部分と負の部分に分けて，それぞれに対して $\int_A f^+ d\mu = \int_A f^- d\mu = 0$ がいえれば，$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu = 0$ となるので，始めから f は非負値と仮定してよい．そこで， f を非負値の μ-可積分な $\mathcal{M}$-可測函数とする．

まず $\varphi \in \mathsf{SF}_+(X, \mathcal{M})$ （＝非負値 $\mathcal{M}$-可測な単函数全体）を考える．このとき，

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i I_{B_i}(x), \quad x \in X$$

と表される．但し，$\alpha_i \geq 0$, $X = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, $B_i = \{x \in X : f(x) = \alpha_i\} \in \mathcal{M}$ かつ $i \neq i' \Rightarrow B_i \cap B_{i'} = \varnothing$ を満たす．

今，$A \in \mathcal{M}$ を $\mu(A) = 0$ とすると，各 i について $A \cap B_i \subset A$ より $\mu(A \cap B_i) = 0$ となる．よって，

$$\int_A \varphi(x)\mu(dx) = \int_X \varphi(x) \cdot I_A(x)\mu(dx) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A \cap B_i) = 0$$

となる．よって，$0 \leq \varphi \leq f$ を満たす任意の単函数 φ に対しては $\int_A \varphi d\mu = 0$ となるので，そのような φ に関する上限をとると

$$\int_A f(x)\mu(dx) = 0$$

となる． □

f を，非負値 μ-可積分函数とすると，各 $A \in \mathcal{M}$ に対して

$$\nu(A) = \int_A f(x)\mu(dx)$$

と定めると，ν は可測空間 $(X, \mathcal{M})$ 上の測度となる．このとき，$\nu(dx)$ を $f(x)\mu(dx)$ あるいは単に $f\mu$ と書くことがある．また ν を **μ に関して密度関数 (density function)f をもつ測度**と言うことがある．

今示した補題から，次のことが分かる：

$$A \in \mathcal{M}, \quad \mu(A) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nu(A) = 0. \tag{9.1}$$

このことが動機付けとなり，次の“ 絶対連続性 ”の概念が生まれた．

定義 9.1. μ, ν を共に可測空間 $(X, \mathcal{M})$ 上の測度とする． もし (9.1) が成り立つならば，**測度 ν は測度 μ に関して絶対連続** (absolute continuous with respect to μ) であるという．このとき，

$$\boxed{\nu \ll \mu}$$

と書き表す．

次に，ある可測集合 $A \in \mathcal{M}$ が存在して，任意の $B \in \mathcal{M}$ に対して，

$$\mu(A \cap B) = \mu(B)$$

を満たすとき， 測度 μ は**可測集合 A に集中している** (concentrate) という． また，二つの測度 μ, ν に対して，適当な互いに素な二つの可測集合 $A, B \in \mathcal{M}$ $(A \cap B = \varnothing)$ が存在して，μ が A に集中し，かつ ν が B に集中しているとき，μ と ν は**互いに特異** (mutually singular) であるという．このとき，

$$\boxed{\mu \perp \nu}$$

と書き表す．

命題 9.1. 可測空間 $(X, \mathcal{M})$ 上の測度 μ, ν, λ に対して次のことが成り立つ：

(1) $\mu \ll \lambda$ かつ $\nu \ll \lambda$ ならば，$(\mu + \nu) \ll \lambda$.

(2) $\mu \perp \lambda$ かつ $\nu \perp \lambda$ ならば，$(\mu + \nu) \perp \lambda$.

(3) $\mu \ll \lambda$ かつ $\nu \perp \lambda$ ならば，$\mu \perp \nu$.

(4) $\mu \ll \lambda$ かつ $\mu \perp \lambda$ ならば，$\mu = 0$.

Proof: (1). 明らかである． (2). 適当な可測集合 $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{M}$ が存在して，$A_i \cap B_i = \varnothing$ $(i = 1, 2)$ であり，μ は A_1 に集中し，λ は B_1 に集中している．また， ν は A_2 に集中し，λ は B_2 に集中している．このとき，$A = A_1 \cup A_2$, $B = B_1 \cap B_2$ とおけば，測度 $\mu + \nu$ は A に集中していることがわかり，λ は B に集中していることが分かる．

(3). $\nu \perp \lambda$ であるので，適当な互いに素な $A, B \in \mathcal{M}$ $(A \cap B = \varnothing)$ が存在して，ν は A に集中し，λ は B に集中している． すると，$\lambda(A) = 0$ であることがわかる．よって，絶対連続性より $\mu(A) = 0$ であること，従って，μ は A^c に集中していることがわかる．故に $\nu \perp \mu$ となる．

(4). (3) より $\mu \perp \mu$ となり，これは明らかに $\mu = 0$ を意味する． □

問題 9.1. 上の命題の証明をすべて詳しく埋めよ．たとえば，(2) においては，$\mu + \nu$ が A に集中していることと λ が B に集中していること，(3) では，$\mu(A) = 0$ であることから μ が A^c に集中していること，等を実際に示せ．

9.2 Hahn 分解

符号つき測度 (signed measure)

定義 9.2. 可測空間 $(X, \mathcal{M})$ 上の集合関数 $\Psi : \mathcal{M} \to [-\infty, +\infty]$ が**符号つき測度** (signed measure) であるとは次の二つの条件を満たすときをいう：

(sm1) $\Psi(\varnothing) = 0.$

(sm2) $\{A_n\} \subset \mathcal{M}$ を互いに素な可測集合列とする．すなわち，$n \neq m \Rightarrow A_n \cap A_m = \varnothing$. このとき，

$$\Psi(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi(A_n).$$

例題 9.1. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする．$f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{M}, \mu)$ とする．このとき，

$$\Psi(A) = \int_A f(x)\mu(dx), \quad A \in \mathcal{M}$$

とおけば，Ψ は $(X, \mathcal{M})$ 上の符号つき測度となる．

注意 9.1. Ψ を可測空間 $(X, \mathcal{M})$ 上の符号つき測度とする．このとき，任意の $A \in \mathcal{M}$ に対して，$A \cap A^c = \varnothing$ 及び $A \cap A^c = X$ であることから，

$$\Psi(X) = \Psi(A) + \Psi(A^c)$$

が成り立たなければならない．ところで，$\pm\infty$ を含んだ数の演算の規約 (§2.6 を参照) により，$(+\infty) + (-\infty)$ や $(-\infty) + (+\infty)$ の演算はあり得ない．よって，ある $A \in \mathcal{M}$ に対して $\Psi(A) = -\infty$ であれば，$\Psi(A^c) < +\infty$ でなければならないので，$\Psi(X) = -\infty$ が成り立つ．同様に，ある $B \in \mathcal{M}$ に対して $\Psi(B) = +\infty$ であれば，$\Psi(X) = +\infty$ でなければならない．従って，符号つき測度は，高々 $+\infty$ または $-\infty$ のいずれか一方の値しかとることが出来ない．

問題 9.2. Ψ を可測空間 $(X,\mathcal{M})$ 上の符号つき測度とする．このとき，適当な $\mathcal{M}$ 可測集合 A に対して $|\Psi(A)|<\infty$ が成り立つとする．このとき，$B\subset A$ を満たす任意の $B\in\mathcal{M}$ に対して，$|\Psi(B)|<\infty$ となることを示せ.

問題 9.3. Ψ を可測空間 $(X,\mathcal{M})$ 上の符号つき測度とする．このとき，A,B をともに $\mathcal{M}$ 可測集合とし，$B\subset A$ かつ $-\infty<\Psi(A)<\infty$ とすれば，

$$\Psi(A-B)=\Psi(A)-\Psi(B)$$

が成り立つことを示せ.

補題 9.2. Ψ を可測空間 $(X,\mathcal{M})$ 上の符号つき測度とする．このとき，$\{A_n\}\subset\mathcal{M}$ が単調増加列とすると，

$$\Psi(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}\Psi(A_n)$$

が成り立つ．また，$\{A_n\}\subset\mathcal{M}$ が単調減少列とし，$|\Psi(A_1)|<\infty$ であれば，

$$\Psi(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}\Psi(A_n)$$

Proof: 証明は定理 3.4 とほぼ同じように出来るが，念のため与えておく．$\{A_n\}\subset\mathcal{M}$ を単調増加な集合列とする：$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$.

$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ とおく．もし，ある番号 n_0 に対して，$\Psi(A_{n_0})=+\infty$ または $-\infty$ とすると，$n\geq n_0$ に対して $\Psi(A_n)=+\infty$ または $-\infty$ となるので，両辺とも $+\infty$ または $-\infty$ として成立する．そこで，すべての n について $-\infty<\Psi(A_n)<\infty$ として証明する．このとき，$B_n:=A_n-A_{n-1}$，$A_0=\varnothing$ とおくと，$\{B_n\}$ は互いに素な $\mathcal{M}$ 可測集合列であるので，$\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n=A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ に注意すると，

$$\begin{aligned}\Psi(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)&=\Psi(A)=\Psi(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\Psi(B_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\big(\Psi(A_k-A_{k-1})\big)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\big(\Psi(A_k)-\Psi(A_{k-1})\big)=\lim_{n\to\infty}\Psi(A_n).\end{aligned}$$

次に，$\{A_n\}\subset\mathcal{M}$ を単調減少列で $-\infty<\Psi(A_1)<\infty$ を満たすとする．このとき，$B_n=A_1-A_n$ とおくと $B_1\subset B_2\subset\cdots\subset B_n\subset\cdots$ であり，さらに

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n=A_1-\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n,\quad A_1\supset\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$$

となることから，前半の結果及び問題 7.3 から

$$\Psi(A_1)-\Psi(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n)=\Psi(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)=\lim_{n\to\infty}\Psi(B_n)=\lim_{n\to\infty}(\Psi(A_1)-\Psi(A_n)).$$

□

定義 9.3. Ψ を可測空間 $(X, \mathcal{M})$ 上の符号つき測度とする．$A \in \mathcal{M}$ が Ψ の**正の集合** (positive set) であるとは，$B \subset A$ を満たす任意の $B \in \mathcal{M}$ に対して $\Psi(B) \geq 0$ を満たすときをいう．同様に，$A \in \mathcal{M}$ が Ψ の**負の集合** (negative set) であるとは，$B \subset A$ を満たす任意の $B \in \mathcal{M}$ に対して $\Psi(B) \leq 0$ を満たすときをいう．

補題 9.3. Ψ を $(X, \mathcal{M})$ 上の符号つき測度とする．集合 $A \subset X$ を，$\mathcal{M}$ 可測集合とし，$-\infty < \Psi(A) < 0$ を満たす集合とする．このとき，適当な $\mathcal{M}$ 可測集合 B で，B は Ψ の負の集合でありかつ，

$$B \subset A, \qquad \Psi(B) \leq \Psi(A) \tag{9.2}$$

を満たすものが存在する．

Proof: 証明の流れとして，集合 A から測度が非負となるような A の部分集合列を取り除いていって，最後に残った部分が題意を満たす集合 B になることを示すという方針で行うことにする．

そのために，

$$\delta_1 = \sup\Big\{\Psi(E):\ E \in \mathcal{M},\ E \subset A\Big\}$$

とおくと，まず $\varnothing \subset A$ であることと符号つき測度の定義 (sm1) から，$\delta_1 \geq 0$ であることがわかる．もし，$\delta_1 = 0$ であれば，$B = A$ とすれば補題は成立することが分かる．以下 $\delta_1 > 0$ として話を進める．そこで，$A_1 \in \mathcal{M}$ を

$$\Psi(A_1) \geq \min\Big(\frac{1}{2}\delta_1,\ 1\Big), \quad A_1 \subset A$$

を満たすように取る．次に

$$\delta_2 = \sup\Big\{\Psi(E):\ E \in \mathcal{M},\ E \subset A - A_1\Big\}$$

とおき，$A_2 \in \mathcal{M}$ を

$$\Psi(A_2) \geq \min\Big(\frac{1}{2}\delta_2,\ 1\Big), \quad A_2 \subset A - A_1$$

を満たすように取る．ここでも，$\delta_2 = 0$ ならば，$B = A_1$ とすれば補題は成立するので，$\delta_2 > 0$ として話を進める．そうして，以下，帰納的に

$$\delta_n = \sup\Big\{\Psi(E):\ E \in \mathcal{M},\ E \subset A - \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\Big\}$$

とおき，$A_n \in \mathcal{M}$ を

$$\Psi(A_n) \geq \min\Big(\frac{1}{2}\delta_n,\ 1\Big), \quad A_n \subset A - \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$$

を満たすように取る．ここで，ある番号 $n_0 \in \mathbb{N}$ で $\delta_n = 0$ となるならば，$B = \bigcup_{i=1}^{n_0-1} A_i$ とすれば，これが求めるものになることがわかる．

従って，以下，任意の n について $\delta_n > 0$ として話をすすめている．すると，上のようにして構成した可測集合列 $\{A_n\}$ に対して，

$$A_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad B = A - A_\infty$$

と定めると，B が求めるものとなることを以下示そう．$\{A_n\}$ は，作り方から互いに素な可測集合列であり，$\Psi(A_n) \geq 0$ であることから $\Psi(A_\infty) \geq 0$ となる．よって，

$$\Psi(A) = \Psi(A_\infty) + \Psi(B) \geq \Psi(B)$$

となり，(9.2) を満たす．最後に，B が Ψ の負の集合であることを示そう．A が $-\infty < \Psi(A) < 0$ を満たしていることから，$A_\infty \subset A$ より， $0 \leq \Psi(A_\infty) < \infty$ となる．また，

$$\Psi(A_\infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi(A_n)$$

であることから，$\lim_{n\to\infty} \Psi(A_n) = 0$ でなければならない．従って，$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ となる．一方，$E \subset B$ を満たす任意の $\mathcal{M}$ 可測集合 E は，任意の n について

$$\Psi(E) \leq \delta_n$$

でなければならないが，今のことより $\Psi(E) \leq 0$ でなければならない． □

さて，この小節の主定理の Hahn の分解定理を示そう．

定理 9.1. (Hahn の分解定理：Hahn decomposition)

$(X, \mathcal{M})$ を可測空間，Ψ をその上の符号つき測度とする．このとき，互いに素な可測集合 $P, N \in \mathcal{M}$ で，P は Ψ の正の集合，N は Ψ の負の集合であり，$X = P \cup N$ を満たすものが存在する．

Proof: Ψ は符号つき測度なので，$+\infty$ 及び $-\infty$ を同時に取ることはない．そこで，ここでは $-\infty$ を取らないとして証明を進めていくことにする．

$$L = \inf\Big\{\Psi(A) : \ A \in \mathcal{M} \text{ は } \Psi \text{ の負の集合}\Big\}$$

とおく．このとき，空集合 $\varnothing$ は Ψ の負の集合となるから，下限を取る集合は空でないことがわかる．また，下限の定義により Ψ の負の集合の可測集合列 $\{A_n\}$ で， $L = \lim_{n\to\infty} \Psi(A_n)$ を満たすものが取れる． このとき，A_n は単調増加として構成できる (**問題** 9.4 を見よ)．そこで，$N = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とおくと，N は Ψ の負の集合であることもわかる．よって， $N = (N - A_n) \cup A_n$ に注意すると，$\Psi(N) = \Psi(N - A_n) + \Psi(A_n) \leq \Psi(A_n)$ から

$$L \leq \Psi(N) \leq \Psi(A_n)$$

がわかる．ところで，Ψ は $-\infty$ をとらないから，L, 従って，$\Psi(N)$ は有限な値であることが分かる．

次に $P = N^c$ とおく．以下，この N, P が求めるものであることを示す．そこで，P が Ψ の正の集合であることを示す．背理法により示す．すなわち，$-\infty < \Psi(A) < 0$ 及び $A \subset P$ を満たす $\mathcal{M}$ 可測集合 A が存在するとする．補題 9.3 により $B \subset A$ かつ $\Psi(B) \leq \Psi(A) < 0$ を満たす Ψ の負の集合 $B \in \mathcal{M}$ が存在する．このとき，$B \cup N$ は Ψ の負の集合とであり，$N \cap B = \varnothing$ から

$$\Psi(N \cup B) = \Psi(N) + \Psi(B) < \Psi(N) = L$$

となり，N が下限を実現する集合であることに反する．従って，そのような可測集合 B，従って A は存在しない．よって，P は Ψ の正の集合である． $\square$

この定理により，次の定義が可能となる．

定義 9.4. (Hahn 分解: Hahn decomposition)

符号付き測度 Ψ の Hahn **分解**とは，互いに素な可測集合の組 (P, N) で，P は Ψ の正の集合，N は Ψ の負の集合となっていて，$X = P \cup N$ を満たすものをいう．

問題 9.4. 上の定理において，

$$L = \inf\Big\{\Psi(A) : \ A \in \mathcal{M} \text{ は } \Psi \text{ の負の集合}\Big\}$$

とおいたとき，$L = \lim_{n\to\infty} \Psi(A_n)$ を満たす集合列 $\{A_n\} \subset \mathcal{M}$ は単調増加列として取れることを示せ．

定理 9.2. **(**Jordan **分解:** Jordan decomoposition**)** Ψ を可測空間 $(X, \mathcal{M})$ 上の符号付き測度とする．また (P, N) を Ψ の Hahn 分解とする．このとき，

$$\Psi^+(A) := \Psi(A \cap P), \quad A \in \mathcal{M}$$

$$\Psi^-(A) := -\Psi(A \cap N), \quad A \in \mathcal{M}$$

とおくと，$\Psi^\pm$ は共に $(X, \mathcal{M})$ 上の測度となる．また，

$$\Psi(A) = \Psi^+(A) - \Psi^-(A), \quad A \in \mathcal{M}$$

かつ，$\Psi^+ \perp \Psi^-$ が成り立つ． とくに $\Psi^\pm$ のどちらかは有限な測度である．

定義 9.5. 上の定理において構成した $\Psi^\pm$ に対して，

$$|\Psi|(A) := \Psi^+(A) + \Psi^-(A), \quad A \in \mathcal{M}$$

とおくと，$|\Psi|$ は $(X, \mathcal{M})$ 上の測度となる．これを Ψ の**全変動測度** (total variation measure) とよぶ．

注意 9.2. f を測度空間 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 上の μ 可積分な函数とすると，その積分は

$$\int_X f(x)\mu(dx) = \int_X f^+(x)\mu(dx) - \int_X f^-(x)\mu(dx)$$

で与えられた．但し，$f^+(x) := \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) := \max\{-f(x), 0\}, \quad x \in X$.

ところで，

$$\nu(A) = \int_A f(x)\mu(dx), \quad A \in \mathcal{M}$$

とおくと，ν は $(X, \mathcal{M})$ 上の符号付き測度となる．このとき，

$$\nu^+(A) = \int_A f^+(x)\mu(dx), \quad \nu^-(A) = \int_A f^-(x)\mu(dx)$$

である．さらに，ν の全変動測度 $|\nu|$ は

$$|\nu|(A) = \int_A |f(x)|\mu(dx) = \int_A f^+(x)\mu(dx) + \int_A f^-(x)\mu(dx), \quad A \in \mathcal{M}$$

で与えられる．

問題 9.5. 上の注意において，$\nu^+ \ll |\nu|$ 及び $\nu^- \ll |\nu|$ となることを示せ．

<u>有界変動函数</u>:

$\varphi(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の関数とする．φ が区間 $[a,b]$ で**有界変動** (finite variation over $[a,b]$) であるとは，

$$V_\varphi[a,b] := \sup_{\Delta} \sum_{i=1}^{n} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| < \infty \tag{9.3}$$

となるときを言う．ただし，右辺の上限は区間 $[a,b]$ の任意の分割：

$$\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b.$$

を渡って取るものとする．また，$[a,b] \subset [a',b']$ とするとき，

$$V_\varphi[a,b] \leq V_\varphi[a',b']$$

となることは明らかである．

問題 9.6. 上のことを示せ．すなわち，$[a,b] \subset [a',b']$ ならば，$V_\varphi[a,b] \leq V_\varphi[a',b']$ が成り立つ．

問題 9.7. 有界閉区間 $[a,b]$ で有界変動な関数 f に対して，

$$V_f[a,b] = 0$$

を満たすことと f が $[a,b]$ 上定数関数であることとは同値となることを示せ．

問題 9.8. 有界閉区間 $[a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ 上の単調関数は，そこで有界変動となることを示せ．

問題 9.9. 有界閉区間 $[a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ 上の C^1-級関数は，そこで有界変動となることを示せ．ここで，f が $[a,b]$ 上で C^1-級であるとは，f は $[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能であり，端点 $x = a$ では右微分，$x = b$ では左微分が存在し，$[a,b]$ 上で f の導関数が連続となるような関数である．

問題 9.10. 関数

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \dfrac{1}{x^\beta}, & \text{if } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

は，$\alpha > \beta$ のときにのみ $[0,1]$ で有界変動となることを示せ．(すなわち，$\alpha \leq \beta$ においては有界変動とはならないことも示せ.)

補題 9.4. 関数 $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ 上の有界変動とする．このとき，以下のことが成り立つ．

(1) φ は $[a,b]$ 上で有界関数．

(2) $a < c < b$ ならば，
$$V_\varphi[a,b] = V_\varphi[a,c] + V_\varphi[c,b]. \tag{9.4}$$

(3) φ を $[a,b)$ 上で右連続であるとする．このとき，各 $x \in [a,b)$ に対して，関数 $V_\varphi[a,x]$ は右連続である．

Proof: (1) は V_φ の定義により明らかである．

(2). 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$[a,b]$ の適当な分割：
$$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$
が存在して，
$$V_\varphi[a,b] - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})| \ \left(\leq V_\varphi[a,b]\right)$$
となる．ところで，$a < c < b$ であるので，適当な番号 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ が存在して，$c \in [x_{j-1}, x_j]$ となる．よって，
$$\begin{aligned} V_\varphi[a,b] - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})| &\leq \sum_{i=1}^{j-1} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(x_j) - f(c)| \\ &\quad + |f(c) - f(x_{j-1})| + \sum_{i=j+1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &\leq V_\varphi[a,c] + V_\varphi[c,b] \end{aligned}$$
となる．$\varepsilon > 0$ は任意だったから，
$$V_\varphi[a,b] \leq V_\varphi[a,c] + V_\varphi[c,b] \tag{9.5}$$
が成り立つことが分かる．

逆に，$\varepsilon > 0$ に対して，適当な $[a,c]$ 及び $[c,b]$ の分割：
$$\Delta_1 : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = c, \qquad \Delta_2 : c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < x_m = b$$
がそれぞれ存在して，
$$V_\varphi[a,c] - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})|, \qquad V_\varphi[c,b] - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{i=1}^{m} |\varphi(y_i) - \varphi(y_{i-1})|$$
とできる．ところで，Δ_1 と Δ_2 を併せたものは $[a,b]$ の分割と考えることができる：
$$\Delta : a = z_0 < z_1 < z_2 < \cdots < z_{n+m} = b, \quad z_i := x_i \ (i = 0, 1, \ldots, n), \ z_{i+n} := y_i \ (i = 0, 1, 2, \ldots, m).$$

よって，

$$\sum_{i=1}^{n}|\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})|+\sum_{i=1}^{m}|\varphi(y_i)-\varphi(y_{i-1})|=\sum_{i=1}^{n+m}|\varphi(z_i)-\varphi(z_{i-1})|\le V_\varphi[a,b].$$

従って，

$$V_\varphi[a,c]+V_\varphi[c,b]-\varepsilon\le V_\varphi[a,b].$$

$\varepsilon>0$ は任意だったから，

$$V_\varphi[a,c]+V_\varphi[c,b]\le V_\varphi[a,b] \tag{9.6}$$

が成り立つ． 故に，(9.5), (9.6) により，(9.4) が成立する．

(3). φ を $[a,b)$ において右連続とする．$a\le x_0<b$ を任意にとり，x_0 における $V_\varphi[a,x_0]$ の右連続性を示す．今，任意に $\varepsilon>0$ をとると，適当な $[x_0,b]$ の分割:$x_0=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_n=b$ が存在して，

$$V_\varphi[x_0,b]-\varepsilon<\sum_{i=1}^{n}|\varphi(y_i)-\varphi(y_{i-1})|$$

を満たす．一方，x_0 において φ は右連続であるから，$\varepsilon>0$ に対して，適当な $0<\delta$ が存在して，

$$|\varphi(x_0)-\varphi(x_0+h)|<\varepsilon,\quad 0<\forall\, h<\delta$$

となる．そこで，$0<y_1-x_0<\delta$ となるようにとっておくと，

$$V_\varphi[x_0,b]<2\varepsilon+\sum_{i=2}^{n}|\varphi(y_i)-\varphi(y_{i-1})|\le 2\varepsilon+V_\varepsilon[y_1,b]. \tag{9.7}$$

また，(2) により，任意の $a<z(<b)$ に対して，

$$V_\varphi[a,b]=V_\varphi[a,z]+V_\varphi[z,b]$$

となることから，$z=x_0,y_1$ として代入して，(9.7) と合わせると

$$-V_\varphi[a,x_0]<2\varepsilon-V_\varepsilon[a,y_1]$$

が成り立つ．よって，問題 9.6 から

$$0<V_\varphi[a,y_1]-V_\varphi[a,x_0]<2\varepsilon,\quad 0<y_1-x_0<\delta$$

となるが，これは $V_\varphi[a,x_0]$ が x_0 において右連続であることを示している． □

問題 9.11. 上の補題の (1) を実際に証明せよ．すなわち，φ を有界閉区間 $[a,b]$ において有界変動であれば，その上で有界関数となることを示せ．

問題 9.12. 関数 f,g を共に有界閉区間 $[a,b]$ $(a<b)$ で有界変動であるとすると，その積 $f\cdot g$ も $[a,b]$ で有界変動となること，および

$$V_{fg}[a,b]\le V_f[a,b]\cdot\sup_{x\in[a,b]}|g(x)|+V_g[a,b]\cdot\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$$

が成立することをを示せ．

問題 9.13. f を有界閉区間 $[a,b]$ $(a<b)$ で有界変動であるとし，ある $c>0$ が存在して，

$$f(x) \geq c > 0 \quad x \in [a,b]$$

を満たすとする．このとき，$1/f$ も $[a,b]$ で有界変動であること，および

$$V_{1/f}[a,b] \leq \frac{1}{c^2} \cdot V_f[a,b]$$

が成り立つことを示せ．

ところで，$x \in \mathbb{R}$ を固定したとき，

$$\lim_{a \to -\infty} V_\varphi[a,x] =: V_\varphi(x) \ (\leq +\infty)$$

は $\overline{\mathbb{R}}$ において存在する．$V_\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$ を φ の**変動函数** (variation function) という．この関数が $\mathbb{R}$ 上の有界関数となるとき，φ を $\mathbb{R}$ 上**有界変動** (bounded variation over $\mathbb{R}$) であるという．また，可測函数 φ は $\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=0$ を満たすとき，**$-\infty$ で退化する** (vanishing at $-\infty$) という．

命題 9.2. φ を $\mathbb{R}$ 上の有界変動函数とする．このとき，有界な非負値単調増加増加関数 φ_1, φ_2 が存在して，

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

と表示できる．すなわち，“有界変動函数は，単調増加な関数の差で書き表される”．

Proof: 各 $x \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\varphi_1(x) := \frac{V_\varphi(x) + \varphi(x)}{2}, \quad \varphi_2(x) := \frac{V_\varphi(x) - \varphi(x)}{2}$$

とおくと，明らかに φ_1, φ_2 が題意を満たすことがわかる． □

問題 9.14. 上の命題で，φ_1, φ_2 が共に非負値単調増加関数となることを示せ．

注意 9.3. 上の命題で，φ を書き表す二つの単調増加な非負値関数の組 (φ_1, φ_2) は一般には一意的に決まらない．実際，任意の定数 $c \in \mathbb{R}$ に対して，$(\varphi_1 + c, \varphi_2 + c)$ を考えれば，これも φ を書き表す単調増加な関数の組となる．

一方，φ を $\mathbb{R}$ 上の有界変動函数とし，φ_1, φ_2 を上の命題で構成した非負値単調増加な関数とする．補題9.4 より，φ が右連続であれば，φ_1, φ_2 も共に右連続となる．そうして，φ が $-\infty$ で退化すれば，φ_1, φ_2 も同じく $-\infty$ で退化することが分かる．

次に，Φ を全変動測度が有界であるような $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の符号付き測度とする．このとき，

$$\varphi_\Phi(x) := \Phi((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R} \tag{9.8}$$

によって関数 φ_Φ を定義すると，φ_Φ は $\mathbb{R}$ 上の有界変動となり，更に $-\infty$ において退化することがわかる． 実際，$\{xi\}_{i=0}^n$ を $\mathbb{R}$ の任意の有限分割 $(\Delta: -\infty < x_0 < x_1 < \cdots < x_n < \infty)$ とすると，

$$\sum_{i=1}^n \bigl|\varphi_\Phi(t_i) - \varphi_\Phi(t_{i-1})\bigr| = \sum_{i=1}^n \bigl|\Phi\bigl((t_{i-1}, t_i]\bigr)\bigr| \le |\Phi|(\mathbb{R})$$

となるので，

$$V_{\varphi_\Phi}(-\infty,\infty)) := \lim_{\substack{x\to-\infty \\ x'\to\infty}} V_{\varphi_\Phi}[x,x'] \le |\Phi|(\mathbb{R}) < \infty.$$

従って φ_Φ は有界変動函数となる．また，$-\infty$ で退化することは簡単に分かる．

問題 9.15. 上で定義した φ_Φ は右連続となることを示せ．すなわち，

$$\varphi_\Phi(x) = \varphi_\Phi(x+) := \lim_{h\to 0+} \varphi_\Phi(x+h), \quad x \in \mathbb{R}$$

が成り立つことを示せ．実際に φ_Φ は $-\infty$ で退化することも示せ．

Hint: Φ の Jordan 分解と測度の単調収束定理を用いよ．

問題 9.16. 上で定義した φ_Φ は，$\Phi(\{x\}) = 0$ となる点 x では連続となることを示せ．

定理 9.3. 関係式 (9.8) は，$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の有界な符号付き測度全体と，$\mathbb{R}$ 上で定義される右連続で，$-\infty$ で退化する有界変動函数全体の間の全単射写像を定める．

Proof: Φ を $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の有界な符号付き測度とすると，既に，φ_Φ が右連続であること，及び有界変動函数となること，さらには $+\infty$ で退化することは見た (**問題** 9.15)．よって，(9.8) は写像として意味を持つことがわかった．

次に，この写像が単射であることを示そう．μ, ν を $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の有界な符号付き測度とし，さらに $\varphi_\mu = \varphi_\nu$ が成り立つとする．

$$\mathcal{A} := \bigl\{[a,b] :\ a, b \in \mathbb{R},\ a < b\bigr\}, \quad \mathfrak{U} := \bigl\{A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) :\ \mu(A) = \nu(A)\bigr\}$$

とおく．明らかに $\mathcal{A}$ は乗法族である, すなわち (6.1) を満たしている: $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$.

また，**問題** 3.5 によって，$\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ であった．$\mathfrak{U}$ が Dynkin 族であること (定義 6.1) を示そう．

(i) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^\infty [-n, +\infty)$ であるから，補題 9.2 より，

$$\mu(\mathbb{R}) = \lim_{n\to\infty} \mu\bigl([-n,\infty)\bigr) = \lim_{n\to\infty} \varphi_\mu(-n) = \lim_{n\to\infty} \varphi_\nu(-n) = \lim_{n\to\infty} \nu\bigl([-n,\infty)\bigr) = \nu(\mathbb{R}).$$

よって，$\mathbb{R} \in \mathfrak{U}$ がわかる．

(ii) $A, B \in \mathfrak{U}$ が $A \subset B$ を満たすとする．このとき，$A = (A - B) \cup B,\ (A - B) \cap B = \varnothing$ を満たす．よって，μ, ν が有界な符号付き測度であることに注意すると

$$\mu(A - B) = \mu(A) - \mu(B) = \nu(A) - \nu(B) = \nu(A - B)$$

が成り立つので，$A - B \in \mathfrak{U}$ となる．

(iii) $A_n \in \mathfrak{U},\ n=1,2,\ldots$ が $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ を満たすとする．すると，再び補題 9.2 より，

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = \nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n).$$

よって，$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{U}$.

以上より，$\mathfrak{U}$ がDynkin族であることがわかった．また，$[a,b] \in \mathcal{A}$ とすると，$[a,b] = [a,+\infty) - (b,+\infty)$ となるが，**問題** 9.15 により φ_μ は右連続であることが分かるから

$$\mu([a,b]) = \varphi_\mu(a) - \varphi_\mu(b) = \varphi_\nu(a) - \varphi_\nu(b) = \nu([a,b])$$

となり，$\mathcal{A} \subset \mathfrak{U}$ が成り立つ．よって，Dynkin 族定理 (定理 6.1) より，

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathfrak{U}.$$

よって，μ と ν は $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上で一致するから，$\mu = \nu$ であることがわかる．ゆえに，(9.8) は単射であることがわかる．

最後に，対応 (9.8) が全射であることを示す．φ を右連続な有界変動函数とする．このとき，命題 9.2 及びそれに続く議論により，適当な右連続な非負値増加関数 φ_1, φ_2 が存在して，$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ と表される．ところで，定理 6.5 により，φ_1, φ_2 に対して，Lebesgue-Stielties 測度 μ_1, μ_2 で，

$$\mu_i([a,b]) = \varphi_i(b) - \varphi_i(a), \quad a < b,\ i = 1,2$$

を満たすものが構成できる．そこで，各 $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ に対して，

$$\mu(A) := \mu_2(A) - \mu_1(A)$$

と定義すると，μ は有界な符号付き測度となる．また，

$$\mu([a,b]) = \varphi(a) - \varphi(b)$$

となることがわかる．さらに，φ は $-\infty$ で退化することから，$a \to -\infty$ とすると，

$$\mu((-\infty,b]) = \varphi(b), \quad b \in \mathbb{R}$$

となり，これは $\varphi_\mu = \varphi$ となることを示している．よって全射性がいえた． □

注意 9.4. §8.1 においても同様の結果を導いているが，この定理は，確率論において非常に重要な役割を果たす．X を確率空間 $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$ 上で定義された確率変数とする．このとき，X の**分布関数** (distribution function) は，

$$F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}$$

で定義される $\mathbb{R}$ 上の函数であり，F_X は $-\infty$ で退化する右連続な単調増加函数であることがわかる．すると，定理により

$$F_X(x) = \mu_X((-\infty,x]), \quad x \in \mathbb{R} \tag{9.9}$$

で与えられる $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の測度が対応する．この測度のことを X の**法則** (law) と呼んだ．

実際には，X の法則は

$$\mu_X(A) = \mathbb{P}(X \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

で定義される一次元測度であるが，X の法則 μ_X を用いて，(9.9) の右辺で F_X を定めて，それを X の分布関数として定義しているテキストもある． □

9.3 Radon-Nikodým の定理

さて，この節はこの章の主定理である Radon-Nikodým の定理を述べる．

可測空間 $(X, \mathcal{M})$ 上の測度 μ は σ-有限な測度とする．すなわち，適当な可測集合列 $\{E_n\} \subset \mathcal{M}$ が存在して，

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset \cdots, \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \quad \mu(E_n) < \infty,\ n = 1, 2, \ldots \tag{9.10}$$

を満たしている．測度 μ に関して密度 f をもつ測度 $f\mu$ に対しては

$$f\mu \ll \mu$$

であるが，その逆が成り立つというのがこれから述べる Radon-Nikodým の定理である．

定理 9.4. (Radon-Nikodým の定理) μ, ν を可測空間 $(X, \mathcal{M})$ 上の測度とする．もし，μ が σ-有限な測度で，ν が有限な測度であるとすれば，以下の二つの条件は互いに同値である．

(i) $\nu \ll \mu$.

(ii) 適当な非負値の μ-可積分な $\mathcal{M}$-可測函数 h が存在して，

$$\nu(A) = \int_A h(x)\mu(dx), \quad A \in \mathcal{M} \tag{9.11}$$

が成り立つ．特に h 及び h' がともに (9.11) を満たすならば，

$$h = h' \quad \mu\text{–a.e.}$$

となる．

Proof: (ii) から (i) は明らか．そこで逆を示す．そのために，まず μ を有限測度と仮定する．このとき，

$$\Phi = \left\{ f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{M}, \mu) : \ f \geq 0, \quad \int_A f(x)\mu(dx) \leq \nu(A) \quad \text{for} \ \ \forall\, A \in \mathcal{M} \right\}$$

とおく．すなわち，集合 Φ は，任意の可測集合 A に対して，

$$\int_A f(x)\mu(dx) \leq \nu(A)$$

を満たす非負値の μ-可積分な可測函数 f 全体集合を表す．$f \equiv 0$ は Φ の元であることから，$\Phi \neq \emptyset$ となることに注意する．次に，

$$\alpha := \sup\Big\{\int_X f(x)\mu(dx) :\ f \in \Phi\Big\}$$

とおくと，明らかに $\alpha \leq \nu(X) < \infty$ である．上限の定義より，適当な函数列 $\{f_n\} \subset \Phi$ が存在して，

$$\int_X f_n(x)\mu(dx) \longrightarrow \alpha \leq \nu(X) < \infty.$$

とできる．$f := \sup f_n$ とおく．各 n について $\tilde{f}_n := \sup_{k\leq n} f_k$ とおくと，

$$0 \leq \tilde{f}_1 \leq \tilde{f}_2 \leq \cdots \leq \tilde{f}_n \leq \cdots, \quad \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n = f = \sup_n f_n$$

となる．任意に N を固定する．そうして $i = 1, 2, \ldots, N$ について $B_i := \{f_i = \tilde{f}_N\}$ とおき，さらに $\mathcal{M}$-可測な集合列 $\{C_i\}_{i=1}^N$ を

$$C_1 = B_1,\ C_k = B_k - (\bigcup_{i=1}^{k-1} B_i) \quad k = 2, 3, \ldots, N$$

で定義する．すると

$$\bigcup_{i=1}^N B_i = \bigcup_{i=1}^N C_i = X$$

が成り立つ．$\{C_k\}_{i=1}^N$ は互いに素な可測集合列であることから，任意の $A \in \mathcal{M}$ について，

$$\int_A \tilde{f}_N \mu(dx) = \sum_{k=1}^N \int_{A\cap C_k} \tilde{f}_N \mu(dx) = \sum_{k=1}^N \int_{A\cap C_k} f_k \mu(dx) \leq \sum_{k=1}^N \nu(A \cap C_k) = \nu(A)$$

が成り立つ．よって，単調収束定理を使うと，$N \to \infty$ とすると，

$$\int_A f(x)\mu(dx) \leq \nu(A), \quad \int_X f(x)\mu(dx) = \alpha$$

が成り立つ．従って，f は Φ の中で‘極大元’であることが分かり，さらに

$$\int_X f(x)\mu(dx) \leq \nu(X) < \infty$$

より f は μ-可積分な函数であることが分かる．

以下，$f\mu$ が求めるものになっていることを示す．すなわち，

$$\int_A f(x)\mu(dx) = \nu(A), \quad A \in \mathcal{M}$$

となることを示す．f は Φ に属するから，

$$\nu_0(A) = \nu(A) - \int_A f(x)\mu(dx)\ (\geq 0), \quad A \in \mathcal{M}$$

は測度を定義する．よって，$\nu_0 = 0$ を示せばよいことがわかる．そこで，そうでない仮定してみる．$\nu_0(X) > 0$ となっているとする．すると，μ は有限測度であるので，十分小さい $\varepsilon > 0$ に対しては

$$\nu_0(X) > \varepsilon\mu(X)$$

が成り立つ．このとき，(P, N) を符号付き測度 $\nu_0 - \varepsilon\mu$ に対する Hahn 分解とする．ところで，任意の $A \in \mathcal{M}$ に対して，$\nu_0(A \cap P) \geq \varepsilon\mu(A \cap P)$ となっていることに注意する．従って，

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \int_A f(x)\mu(dx) + \nu_0(A) \geq \int_A f(x)\mu(dx) + \nu_0(A \cap P) \\ &\geq \int_A f(x)\mu(dx) + \varepsilon\mu(A \cap P) = \int_A \big(f(x) + \varepsilon I_P(x)\big)\mu(dx), \quad A \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

となる．ところで， $\mu(P) > 0$ であることに注意する．実際，$\mu(P) = 0$ であれば，絶対連続性により $\nu(P) = 0$ となるので，$\nu_0(P) = 0$ が成立する．すると，

$$\nu_0(X) - \varepsilon\mu(X) = (\nu_0 - \varepsilon\mu)(N) \leq 0$$

となり，$\nu_0(X) > \varepsilon\mu(X)$ に矛盾することになる．よって $\mu(P) > 0$ である．従って，上の評価より，$f + \varepsilon I_P \in \Phi$ が出てくるが，

$$\alpha \geq \int_X (f(x) + \varepsilon I_P(x))\mu(dx) > \int_X f(x)\mu(dx) = \alpha$$

となり矛盾である．従って，$\nu_0 = 0$ でなければならない．

さて，次に μ が σ-有限な測度の場合ついて示すことにする．すると，適当な可測集合の増加列 $\{B_n\}$ が存在して，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = X, \quad \mu(B_n) < \infty, \quad n = 1, 2, \ldots$$

となるように出来る．このとき，各 n について μ 及びを B_n に制限して考えると，前半の結果が使えて，適当な $\mathcal{M}$ 可測函数 $f_n : B_n \to [0, +\infty)$ が存在して，

$$\nu(A \cap B_n) = \int_{A \cap B_n} f_n(x)\mu(dx), \quad A \in \mathcal{M}$$

を満たす．そこで，$f : X \to [0, +\infty)$ を $f(x) = f_n(x), \quad x \in B_n$ として定義すると，これが求めるものになっていることを示す．そのために，まず g の 'well-difinedness' を確認する．すなわち，$B_n \subset B_{n+1}$ であるから，$f_n(x) = f_{n+1}(x)$ a.e on (B_n) が成り立たなければならない．ところが，

$$\int_{B_n \cap A} f_n(x)m(dx) = \nu(B_n \cap A) = \nu(B_n \cap A \cap B_{n+1}) = \int_{B_n \cap A} f_{n+1}(x)m(dx), \quad A \in \mathcal{M}$$

が成り立つ．ここで $A = B_n(f_n > f_{n+1}) = \{x \in B_n : f_n(x) \neq f_{n+1}(x)\}$ として，上の関係式に代入すると，B_n 上では μ は有限測度であるので，

$$0 = \int_A (f_n(x) - f_{n+1})\mu(dx) > 0$$

が成り立つことになるので $f = f_n = f_{n+1}$ a.e. (A) となる．よって，各 n に対して

$$\nu(A \cap B_n) = \int_{A\cap B_n} f_n(x)\mu(dx) = \int_{A\cap B_n} f(x)\mu(dx)$$

であるので，$\{A \cap B_n\}_n$ について，測度の単調性に関する補題 3.7 を用いると

$$\nu(A) = \int_A f(x)\mu(dx), \quad A \in \mathcal{M}$$

が成り立つ． □

定義 9.6. 上の定理によって得られる f を，$\boldsymbol{\nu}$ **の** $\boldsymbol{\mu}$ **に関する** Radon-Nikodým **導関数** (derivative) といい，

$$\frac{d\nu}{d\mu}(x) := f(x)$$

と表されることがある．

問題 9.17. μ を可測空間 $(X, \mathcal{M})$ 上の符号付き測度とする．このとき，次を示せ．

(i) $A \in \mathcal{M}$ に対して，$|\mu|(A) = 0$ であることと，$B \subset A$ を満たす任意の $\mathcal{M}$-可測集合 B に対して，$\mu(B) = 0$ となることとが同値である．

(ii) 一般には，$\mu(B) = 0$ から $|\mu|(B) = 0$ が従うとは限らない．このことを反例を構成して示せ．

問題 9.18. μ を可測空間 $(X, \mathcal{M})$ 上の符号付き測度とする．ν は

$$|\mu(A)| \le \nu(A),\ A \in \mathcal{M}$$

を満たす $(X, \mathcal{M})$ 上の測度とする．このとき，

$$|\mu|(A) \le \nu(A), \quad A \in \mathcal{M}$$

となることを示せ．

問題 9.19. 可測空間 $(X, \mathcal{M})$ 上有限な符号付き測度の列 $\{\mu_n\}$ 及び μ が，$f \ge 0$ となる可測関数に対し，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f(s)\mu_n(ds) = \int_X f(s)\mu(ds)$$

を満たしているとすれば，$\mu_n \ll \mu$ $(n = 1, 2, \ldots)$ で，かつ $h_n(s) = \frac{d\mu_n}{d\mu}(s),\ s \in X$ とするとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n(s) = 1, \quad \mu\text{-a.e}\ \ s \in X$$

となることを示せ．