はじめての
ルベーグ積分

LEBESGUE INTEGRAL

Jun Terasawa
寺澤 順

日本評論社

序

一般に日本に限らず世界中どこでも初等教育で教授する積分は，専門用語ではリーマン積分とよばれる。理論を整備した数学者の名前を冠している。

実は，リーマン積分は，初等的な関数を取り扱う限りは十分明快であり何らの不都合はないが，ちょっと高級な関数となると，いくつかの欠陥を露呈することが当初から指摘されていた。これは一般には微調整によって対応することとなっており，その仕掛けの一つが例えば，広義積分であった。

こうした点をスッキリさせようという研究を，いまから約 100 年ほど前，ジョルダン，カントール，ボレルら多くの人たちが進める中で，フランスのルベーグが，頭一つ抜き出る形で，決定版ともいえる極めて優れた理論体系を構築した。これは，その後，多くの研究者によって整備され発展して，今日ルベーグ積分とよばれるものになった。

本書ではこのルベーグ積分論を論ずる。特に，一変数の，つまり実数直線上のルベーグ積分論である。

本のタイトルも示しているように，入門書である。したがって，予備知識として格別なものは想定しない。高校卒業程度または大学教養課程修了程度の微分積分に習熟しておられれば十分である。ただ，数学に関心を持っていただいていることが前提となる。

全体を通じて，見通しのよい平易な解説を心掛け，初等教育との連続性を重視した。特に，積分の記号として，類書によく見られる

$$\int_E f\,d\mu \quad や \quad \int_E f(x)d\mu(x)$$

の代わりに

$$\int_E f(x)dx \quad や \quad \int_\alpha^\beta f(x)dx$$

を用いた。

定理の証明については，証明そのものが定理の解説になる場合もあるので，筋道が読者に通じるように丁寧に記述したつもりである。証明は小活字で組版した。

リーマン積分の欠陥を改善したと言いながら，初等教育でルベーグ積分を教授しない（実は，できない）理由として，ルベーグ積分の導入に序論が必要であることが挙げられる。

集合論やトポロジー（位相幾何学）についての，教養程度以上の基礎知識である。そこで，本書ではこれらについて，冒頭で解説を加えた。ただし，本書の理解に必要な範囲の事柄に限った。目標はルベーグ積分であり，いたずらな回り道は本意でないからである。

一方で，本書は広範の読者を対象としており，中には数学についてかなり進んだ知識をお持ちの方も当然おありである。そうした方々のために，本文の随所で「詳しい読者のために」とか「難しいことを述べると」などと断って，やや高度な事柄も付け加えた。これらは蛇足であり，飛ばして読んでいただいても何の支障もない。

また数学の研究は人間が行うものであるから，携わった人々の喜びや悲しみについて知るのも意味のないことではない。そこで主要な研究者について，短いコメントを所々で付け加えた。時代背景は，19 世紀から 20 世紀前半にかけての打ち続く戦争である。

第 0 章では，リーマン積分の欠陥について詳しく説明する。

第 1 章では，ルベーグの考え方のアウトラインを述べる。

第 2 章は，上にも述べた序論である。ここに，ルベーグ積分の理解に当たって必要で，しかも必ずしも数学の一般常識となっていないと考えられる事柄を，要項の形で列挙した。可算集合についての説明はここに含まれる。また，本書のようなテーマでは，どうしても極限の厳格な取り扱いが必要となるので，それについての説明も付け加えた。

第 3 章では外測度を導入する。ルベーグ積分論の始まりである。開集合・閉集合・コンパクト集合についての解説はここで行った。カントール集合はここで導入する。

第 4 章では測度論を展開し，その後のルベーグ積分の本格導入への準備とした。測度はカラテオドリーの方式にしたがって導入する。章末では，可測でない集合をヴィターリに従って構成する。これには，実は数学の根幹に関わる問題（選択公理）が潜んでいるので，それについての説明も付け加えた。なお，本書では可測関数として有限の値を取るもののみを考察する。

ルベーグ積分論は第 5 章・6 章で展開される。第 5 章では類書に見られる「単関数」という述語の代わりに「単純関数」を用いることとしている。「非負値関数」もすべて「正値関数」に統一した。なお，本書では，関数列については，いわゆる，点ごとの収束 pointwise convergence に話題をしぼった。

第 7 章では，ルベーグ積分がリーマン積分を拡張したものになっていることを論証する。実はリーマン積分には，本書と微妙に異なる定義の仕方があり，これも時々行われる。結果的にはどちらでも同じことになるが，コメントを章末に付け加える。

第 8 章は，ルベーグ積分と微分との関連，すなわち微分積分学の基本定理を論ずる。ディニ導関数や有界変動や絶対連続の関数についての理論を展開する。また，単調関数の微分可能性に関するルベーグの重要な定理も証明する。

そして本書は最後に，ルベーグ積分にも欠陥があると主張してその後ダンジョア，ペロン，ヘンストックらによって展開された積分論の概略を**新リーマン積分**として，読者に紹介する。これは多くの研究者によって独立に，バラバラに推進されてきたが，1980 年代にすべて同じものであることが明らかになった，その意味ではホットニュースとも言うべき新しい積分である。

第 4 章～8 章の章末に練習問題を配し，さらに，すべての問題の解答を巻末に与えておいた。解法のヒントや解説を付け加えた場合もある。これも本文の

一部であるので，できれば読者がそれぞれを自分で解いて，提供された解と比較しながら本文の解説についての理解を深めていただければと願っている。

本書は $\mathcal{A}_\mathcal{M}\mathcal{S}$-LaTeX 2_ε で組版した。曲線のグラフなどの図版はすべて，TeX の枠内で私が PSTricks を用いて直接描いたものである。主として plotting によっているので，sin 関数などの場合，見映えをよくするための縮小・拡大などを除けば正確なはずである。欧文・数学記号用フォントは，著者の前著『π と微積分の 23 話』同様，W. シュミット氏作の Computer Modern Bright Font を採用した。TeX に標準装備の Computer Modern Font の変形である。

終わりに，本書作成について助言を惜しまれなかった，著者の大学のかつての同級生であり畏友である，亀書房代表・亀井哲治郎氏にお礼を申し上げる。

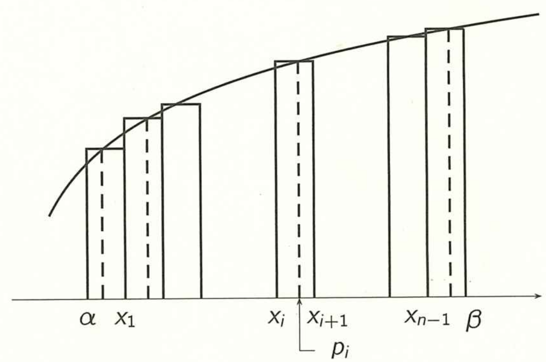
2009 年 2 月 寺澤 順

目次

第 0 章　高校以来の積分

日本の高校に限らず，世界中の初等教育では積分というものを，専門的な言い方でいう**リーマン積分**の形で教えている。これはリーマンが提唱したものである。

これは次のようにする。



まず，区間 $[\alpha, \beta]$ の有限個の分点による分割（等分とは限らない）

$$\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = \beta \tag{0.1}$$

と分割の内点（分点とも中点とも限らない）

$$x_i \leqq p_i \leqq x_{i+1}, \quad i = 0, 1, \cdots, n-1 \tag{0.2}$$

を用いて

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} f(p_i)(x_{i+1} - x_i) \tag{0.3}$$

の形の総和を考える。これを**リーマン和**とよぶ。そして，分割 (0.1) の最大幅を限りなく細かくするとき，すなわち

$$\max_i \{x_{i+1} - x_i\} \to 0$$

とするとき，内点 (0.2) の選び方によらず，リーマン和が一定の極限に収束する状況を考える。そして，このときの極限を

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

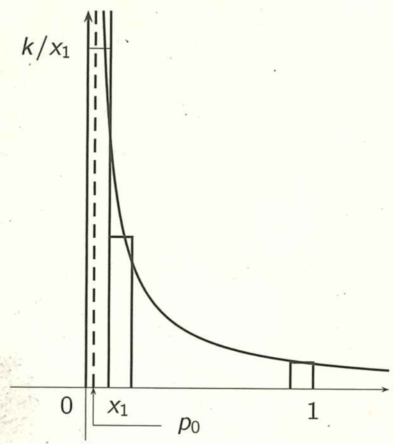
と表わし，関数 f は $[\alpha, \beta]$ 上で積分可能である，ということにする。

これによって，例えば，$f \geqq 0$ のとき，f のグラフと x 軸，直線 $x = \alpha$，$x = \beta$ で囲まれた領域の面積が計算できることとなる。

初等教育で取り扱う単純な関数の場合は気にならないが，この定義には実は大きく 2 つの問題点がある。

一つの問題点は，リーマンが最初から気が付いていたことで，この定義が f が $[\alpha, \beta]$ で有界でないと意味をなさないことにある（関数が有界であるとは $r < f(x) < s$ となる定数 r, s が存在すること。後述）。

実際，例えば，$[0, 1]$ 上で $f(x) \geqq 0$ が $x = 0$ で有界でないとき，



$[0, 1]$ のどのような分割

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1$$

を取っても，任意の定数 $k > 1$ に対して内点 $x_0 < p_0 < x_1$ を

$$f(p_0) > \frac{k}{x_1}$$

と取ることとすれば，リーマン和 (0.3) の値は

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(p_i)(x_{i+1} - x_i) \geqq f(p_0)(x_1 - x_0) > \frac{k}{x_1} x_1 = k$$

となる。これはリーマン和がいくらでも大きくなることを意味し，f は決して積分可能ではないこととなる。

これについてリーマンが提示した解決策は今日**広義積分**または**異常積分**とよばれ広く用いられている。

すなわち，上の例で，f が例えば点 $x = 0$ でのみ有界でないとき，

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{\alpha \to +0} \int_\alpha^1 f(x)dx$$

と定義すれば，有界でない関数のうちでもかなりのものを救済して積分可能とすることができる。（できるだけ多くの関数が積分可能であることが望ましい。）

例えば $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ は $[0, 1]$ 上で $x = 0$ において有界でないが

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\alpha \to +0} \int_\alpha^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\alpha \to +0} \Big[2\sqrt{x} \Big]_\alpha^1 = \lim_{\alpha \to +0} (2 - 2\sqrt{\alpha}) = 2$$

と計算され，積分可能となる。

リーマンのこのアイデアは，ただの思い付きではなく，それ自体極めて優れており，同じことが積分範囲が有界でない場合にも適用される。例えば

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \to \infty} \Big[-e^{-x} \Big]_0^b = \lim_{b \to \infty} (-e^{-b} + 1) = 1$$

である。

これをもって問題の一応の解決とはなる。ただやや緊急避難的対応の印象をぬぐうことはできない。こうした処置を最初から組み込んで，有界でない関数も普通に取り扱えるような，積分の定式化はないのか，という気持ちが残る。

いま一つの問題は，いわゆる**項別積分**に関するものである。

関数の極限

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \tag{0.4}$$

が与えられたとき，両辺を積分して

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left(\int_{\alpha}^{\beta} f_n(x)dx\right)$$

と計算して構わないか，という点である。見過ごしがちであるが，ここには実は，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{\alpha}^{\beta} f_n(x)dx\right) = \int_{\alpha}^{\beta}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx \tag{0.5}$$

が成立するか，という面倒な問題が潜んでいる。この式を項別積分とよぶ。

これの解決のために，19 世紀半ば頃から多くの研究者がいろいろのアイデアを持ち寄った。その中で結局主流となったのが**一様収束**という概念である。すなわち，極限 (0.4) がただの収束でなく，一様収束であれば (0.5) の成立が保障されるということである。

この点について詳しいことは，一様収束の定義まで含めて，拙著『π と微積分の 23 話』第 15 話に図解して述べておいたので，参照されたい。

これでこの点も一応の解決と見られるが，あえて言えば，問題点は執拗に残ってしまった。主な点を挙げれば

- 極限 (0.4) が実際，一様収束かどうかという検証が往々にして面倒である，
- 一様収束でなくても (0.5) が成立する事例がある，

などがある。

ルベーグ

ルベーグ Henri Lebesgue (1875–1941) は 1899–1901 に次々に発表した論文で，上記の，有界でない関数の積分の取り扱いと，項別積分の取り扱いの 2 点を極めて合理的に解決する提案を行った。そればかりでなく，どのような関数がリーマン積分可能なのか，という点にまで研究を広げた。

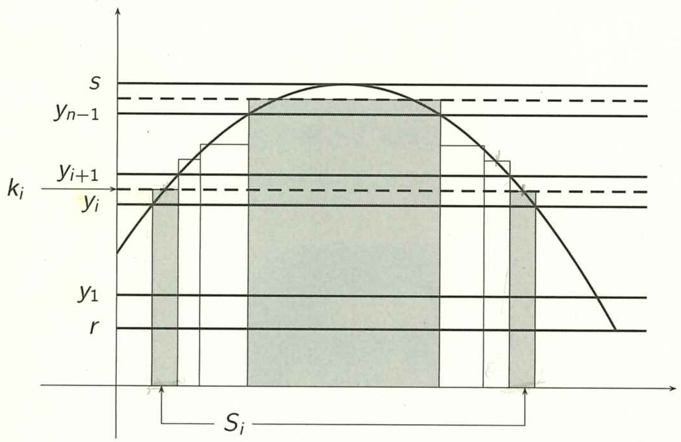
ルベーグは 1894 年にパリ高等師範学校（École Normale Supérieur）を卒業してから 2 年ほど図書館に勤め，それからナンシーの高校教師になった。その間ずっとボレルらと緊密に連絡を取り積分論の研究を続けた。そしてその成果により，1902 年，27 歳のときにソルボンヌで博士号を取得した。1921 年にはコレージュ・ド・フランスの教授に就任し，以後，トポロジー，集合論，偏微分方程式論などの多様な分野に亘って多くの業績を残した。

第 1 章　ルベーグの考え方

ルベーグの考え方のアウトラインを述べる。

ルベーグの基本的な考え方は，関数 f の積分を論じるのに，リーマンのように x 軸上の定義域を分割するのではなく，y 軸上の値域を分割することであった。

厳格な取り扱いは第 5 章以降に送る。ここでは，アウトラインを述べておく。



関数 f が有界である場合，すなわち，何らかの定数 $r < s$ に対して $f(x)$ の値域が $[r, s]$ に含まれる場合，これを分割して

$$r = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = s$$

を考え，

$$S_i = \{x : y_i \leqq f(x) \leqq y_{i+1}\}$$

とおくことにする。このそれぞれの S_i のサイズを何らかの方法で計測し，それを $\mu(S_i)$ と表わす。そして，分割の内点

$$y_i \leqq k_i \leqq y_{i+1}$$

に関して

$$\sum_{i=0}^{n-1} k_i \cdot \mu(S_i)$$

の極限を考えることとしたのである。

ここで問題となるのは，S_i のサイズ $\mu(S_i)$ をどのようにして計測するか，ということである。

ここに掲げた図のような，私たちがぼんやりと考える，左から右へ滑らかにつながってゆったりと波を打っているような関数であれば，各 S_i はそれ自身が線分，すなわち，実数直線上の区間か，あるいはいくつかの区間の集まりであり，サイズというものは自明である。しかしながら，S_i が無限個の区間から成り立っていたり，孤立した点を含んでいたりすると，事態はそれほど単純ではなくなる。

そこでルベーグが考えたのが**測度**という概念である。

実数の集合 S に何らかの方法で，数値

$$0 \leqq \mu(S) \leqq \infty$$

を対応させ測度 measure とよぶこととする。これがサイズを表わす以上，常識的にいくつかの性質を満たさねばならない。そのうちには，例えば次のようなものが挙げられる：

- $\mu([u, v]) = \mu((u, v)) = \mu((u, v]) = \mu([u, v)) = v - u$
- $\mu(\emptyset) = 0$,　$\mu(\mathbb{R}) = \infty$
- S, T が離れたところに位置する集合なら $\mu(S \cup T) = \mu(S) + \mu(T)$
- S を平行移動した集合が T なら $\mu(S) = \mu(T)$
- $\cdots$

アイデアとしては，まず集合 S を外側から区間の和で近似してゆき究極のサイズとして**外測度**とよばれるもの $\mu^*(S)$ を求める。さらに内側から計測することとして**内測度** $\mu_*(S)$ を求め，

$$\mu^*(S) = \mu_*(S)$$

となるとき，つまり外から計測しても内から計測しても同じ値になるとき，計測可能と考え，この共通の値を $\mu(S)$ と表わせばよいという計画である。

しかしすべてが計画通りに順調に進行するわけではない。

例えば，最初の問題は，内測度をどのように計測するか，ということであろう。具体的には，例えば

$$S = [0,1] \text{ 内の無理数全体の集合}$$

に対してはどうするか。ここにも工夫が必要となる。

また，初めに述べた積分の定義にしても，これでは関数 f が有界の場合にしか通用しない。f が有界でない場合は，頭や足を切って $n = 1, 2, \cdots$ に対して

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{when } -n \leqq f(x) \leqq n \\ n & \text{when } f(x) \geqq n \\ -n & \text{when } f(x) \leqq -n \end{cases}$$

なる有界関数 f_n を考え，

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

に着目して，

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta f_n(x)dx$$

と考えることになる。

ただ，これについても，右辺の極限がどのようなときに存在するのか，という点をはじめ，f_n の作り方について，もっと精密に f を近似させても極限が同じであるのかなど，あるいは，f が有界の場合でさえ，値域を含む閉区間 $[r, s]$ の選択に積分の値が依存しないのか，などなど面倒な問題点が次々に発生してくる。

次章以降では，ルベーグの基本的なアイデアの秀逸さを認識した上で，これらの困難を克服してゆかねばならない。幸い，その後の多くの学者たちの努力によって理論が整備されてきており，私たちはその恩恵に浴することができる。

本書では積分は常にルベーグ積分を意味するものとする。リーマン積分を意

味するときはそう明記し，常に

$$(R)\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

のように表わすこととする。そして

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \quad \text{または} \quad (L)\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

はルベーグ積分を意味するものとする。後者はルベーグ積分であることを特に強調する必要があるときに用いる。

なお，本書では，一変数の実数直線上の関数のみを取り扱うが，実はルベーグの理論は，そのまま多変数の関数や複素関数にも適用される。その場合，集合 S のサイズは面積や体積と理解される。特に S が平面上の集合である場合，外測度の計測は，S を多角形で近似させることによって行うこととなる。

リーマン Bernhard Riemann (1826–1866) は牧師の家庭に生まれ，ゲッティンゲン大学でガウスに学んだ。結核のため短命であったこともあり，論文のほとんどは要約の形に終わった (当時は，今日のように論理的に厳格な記述を要求されなかったこともある)。よく言われることであるが，論文には，(1) 誰でもすぐに証明できること，(2) 本人が別にすでに証明したこと，(3) これから研究するつもりでいたこと，(4) よく調べてみないと本当に正しいかどうか疑わしいこと，などが混然と述べられており，その意味で，後代の研究者にとって，いまだにアイデアの宝庫と言われる。著名なものとして，リーマン面やゼータ関数などがこの中に含まれる。リーマン積分と今日言われるものは，フーリエ級数に関する論文 “Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe” の第 4 節 (pp.12–13) に述べられている。死後 2 年たってデデキントの手で発表された。

リーマン

第 2 章　準備

本論を始める前に，いくつかの基本的な事柄を述べておかねばならない。

2.1　集合について

まず，集合とは，原則として何であっても，ものの集まりを表わす。大学のある特定の専攻の学生の全体の集合とか，ある地区で氏名に「山」の入っている人全体の集合とか，$\cdots$。

大事なことは，そうしたものを一まとめにして考察の対称にするという考え方である。

集合 A に要素 x が属するということを記号で

$$x \in A \quad \text{または} \quad A \ni x$$

と表わす。否定形は $\notin$ または $\not\ni$ である。

集合 A の一部を**部分集合**とよぶ。A 自身も A の一部と考え，部分集合である。A 以外の部分集合を**真部分集合**という。B が A の部分集合であるというのを記号で次のように表わす：

$$B \subset A \quad \text{または} \quad A \supset B$$

否定形は $\not\subset$ または $\not\supset$ である。真部分集合であることは

$$B \subsetneqq A \quad \text{または} \quad A \supsetneqq B$$

と表わす。

この 2 つの記号 $\in$，$\subset$ を混同して用いないように読者は気をつけていただ

きたい。

$$B \subset A$$

とは

$$x \in B \Longrightarrow x \in A$$

ということである。

集合を表わすとき全体を波カッコ（中カッコともいう）$\{,\}$ でくくることが世界中で通用する約束である。その際，要素を列挙する方法があり：

$$\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \cdots, \sqrt{n}, \cdots\}, \quad \{\text{刑事コロンボ}, \text{古畑任三郎}, \text{金田一耕助}\}$$

要素の満たすべき条件を挙げる方法がある：

$$\{x : x \text{ は正で，} x^2 \text{ は整数}\}, \quad \{x : x \text{ はドラマの有名な探偵}\}$$

後者は，

$$\{x : P(x)\} = (\text{条件 } P(x) \text{ を満たす } x \text{ の全体})$$

の形である。日本語では語順が逆で不合理のような気がするが，例えば英語では

the set of x such that $P(x)$ holds

であり，語順のままである。間のコロン：を such that と読むとよい。

例えば，通常の実数上の区間はこの記号を用いれば次の通り：

$$[u, v] = \{x : u \leqq x \leqq v\}, \quad (u, v) = \{x : u < x < v\}$$

条件 $P(x)$ が自明なときは，時に巧みに省略することがある。例えば，数列 $c_1, c_2, , \cdots$ を表わすのに

$$\{c_n : n = 1, 2, \cdots\} = \{c_n\}_n = \{c_n\}$$

と表わしたりする。

実数全体の集合を本書では $\mathbb{R}$ で表わすこととする。同様に有理数全体は $\mathbb{Q}$，無理数全体は $\mathbb{P}$ である。したがって：

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{P} \quad \text{また} \quad \mathbb{Q} \subset \mathbb{R},\ \mathbb{P} \subset \mathbb{R}$$

ここに $\cup$ は**和集合**を表わし，$\cap$ は**共通部分**を表わす（共通部分は**交わり**とも

よぶ)：

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ または } x \in B\}$$
$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

例えば,

$$\{x : x^2 - 2x - 3 \leqq 0\} \cap \{x : x^2 - 3x + 2 > 0\}$$

は, $x^2 - 2x - 3 \leqq 0$ かつ $x^2 - 3x + 2 > 0$ となる x の全体であるから

$$[-1, 1) \cup (2, 3]$$

と同じである。

集合 A, B は $A \cap B = \emptyset$ のとき**互いに素**とよぶ。

集合がたくさんあるとき，それが添え字を用いて

$$A_\lambda, \quad \lambda \in \Omega$$

と表わされていれば，和集合および共通部分は

$$\bigcup_{\lambda \in \Omega} A_\lambda = \bigcup \{A_\lambda : \lambda \in \Omega\} = \{x : x \in A_\lambda \text{ for some } \lambda \in \Omega\}$$
$$\bigcap_{\lambda \in \Omega} A_\lambda = \bigcap \{A_\lambda : \lambda \in \Omega\} = \{x : x \in A_\lambda \text{ for all } \lambda \in \Omega\}$$

と表わされる。したがって例えば $n = 1, 2, \cdots$ に対して

$$A_n = \left\{x : 0 \leqq x < \frac{1}{n}\right\}$$

であれば

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$$

となる。右辺は 0 のみからなる集合である。この式を

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_n \cap \cdots = \{0\}$$

と表わす流儀もある。

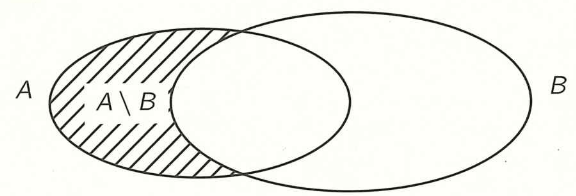
2 つの集合 A, B に対して，B の A における**補集合** とよばれるものは,

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ but } x \notin B\}$$

と表わす。これは $B \not\subset A$ の場合も用いられる。よって

$$A \setminus B = A \cup B \setminus B = A \setminus A \cap B$$

である。



特に，単に「A の補集合」と言うときは，$\mathbb{R}$ における補集合

$$\mathbb{R} \setminus A$$

を意味する。

一昔前はこれを**差集合**とよび

$$A - B$$

と表わしていたが，この記号は現在では $A, B \subset \mathbb{R}$ のときなどに

$$A - B = \{x : x = y - z \text{ for some } y \in A, z \in B\}$$

の意味で使うのが一般的である。 $A + B$ についても同様：

$$A + B = \{x : x = y + z \text{ for some } y \in A, z \in B\}$$

次がよく用いられる：

$$A \setminus B \cup C = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$
$$A \setminus B \cap C = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

読者は次を検証してみられるとよい：

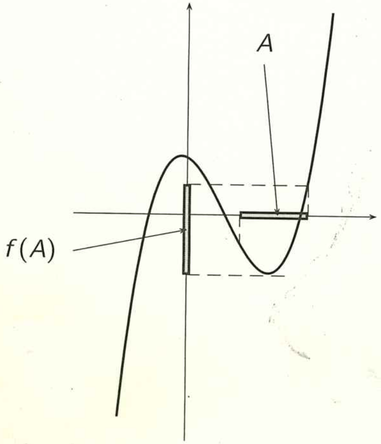
$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap B \cap C)$$

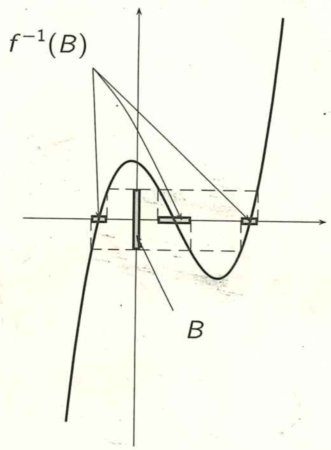
2.2 像と逆像

一般に関数 $f: X \to Y$ が与えられたとき，$A \subset X$，$B \subset Y$ に対して

$$f(A) = \{y \in Y : y = f(x) \text{ for some } x \in A\}$$
$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

と表わし，それぞれ A の f による**像**，B の f による**逆像** とよぶ。





$A, A' \subset X$，$B, B' \subset Y$，また各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $A_\lambda \subset X$，$B_\lambda \subset Y$ とするとき，次が成り立つ：

$$f\left(\bigcup_\lambda A_\lambda\right) = \bigcup_\lambda f(A_\lambda), \quad f\left(\bigcap_\lambda A_\lambda\right) \subset \bigcap_\lambda f(A_\lambda)$$
$$f^{-1}\left(\bigcup_\lambda B_\lambda\right) = \bigcup_\lambda f^{-1}(B_\lambda), \quad f^{-1}\left(\bigcap_\lambda B_\lambda\right) = \bigcap_\lambda f^{-1}(B_\lambda)$$
$$f(A \setminus A') \supset f(A) \setminus f(A'), \quad f^{-1}(B \setminus B') = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(B')$$

例えば，最初の式については：

$$y \in (\text{左辺}) \iff y = f(x) \text{ for some } x \in \bigcup A_\lambda$$
$$\iff y \in f(A_\lambda) \text{ for some } \lambda \iff y \in (\text{右辺})$$

最後の式については：

$$x \in f^{-1}(B \setminus B') \iff f(x) \in B \setminus B' \iff x \in f^{-1}(B) \text{ and } \notin f^{-1}(B')$$

読者は，

$$f(A \cap A') = \emptyset \neq f(A) \cap f(A') \text{ や } f(A \setminus A') \neq \emptyset = f(A) \setminus f(A')$$

となり得ることを検証してみられるとよい。

2.3 上限・下限 *vs.* 最大値・最小値

実数の集合 A が**有界**であるとは，ある定数 r, s に対して

$$r < x < s \text{ for all } x \in A$$

が成立することを言う。これの左半分だけ，すなわち

$$r < x \text{ for all } x \in A$$

が成り立つときは**下に有界**とよぶ。右半分だけのときは**上に有界**とよぶ。

上に有界だからといって，A が最大値を持つとは限らない。しかしその場合でも上方にある程度の限界がある。例えば

$$A = \left\{x : \sin x < \frac{1}{2} \text{ かつ } x < \frac{2\pi}{3}\right\}$$

には最大値はないが，例えば $x < \frac{\pi}{2}$ であることは確かである。そこでこの $\frac{\pi}{2}$ のような数のうちの最小のものを A の**上限** supremum とよび，$\sup A$ と表わす。いまの場合，

$$\sup A = \frac{\pi}{6}$$

である。

正確な定義を述べると

$$\sup A = t$$

とは

$$x \leqq t \text{ for all } x \in A, \text{ かつ, 数列 } x_n \in A \text{ が取れ } \lim_{n\to\infty} x_n = t$$

のことである。言ってみれば，この前半が上限という言葉の「上」の部分にあたり，後半が「限」の部分に当たる。t よりちょっとでも小さい数は「上」にならない，ということである。

最大値は上限である。両者の違いは，その値がもともとの集合 A に属しているかどうかということである。すなわち，属している場合，最大値であり，属していない場合，上限なのである。この意味で上限は「広い意味の最大値」ということができる。

最大値というものは存在するとは限らない。しかし上限は必ず存在する。すなわち，実数の基本性質として次が成立する：

上に有界な集合には必ず上限が存在する。

これは極めて重要であり，本書でも繰り返し用いる。別の言い方で次のようにも述べられる（拙著『π と微積分の 23 話』pp.xii–xiii）：

単調増加数列は ∞ に発散するか，有限の値に収束するかである。

下限 infimum も同様に定義される。すなわち

$$t = \inf A$$

とは，次のことである：

$$x \geqq t \ \text{ for all } \ x \in A, \ \text{かつ，数列} \ x_n \in A \ \text{が取れ} \ \lim_{n\to\infty} x_n = t$$

最小値と下限との関係についても，最大値と上限の関係について上で述べたことがそのまま当てはまる。そして，下限についても次が成り立つ：

下に有界な集合には必ず下限が存在する

または

単調減少数列は $-\infty$ に発散するか，有限の値に収束するかである。

読者は次を検証してみられるとよい：

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B, \ \ \inf(A+B) = \inf A + \inf B$$
$$\sup(-A) = -\inf A$$

さらに，集合 A の上で定義された関数 f が有界であるというのは，

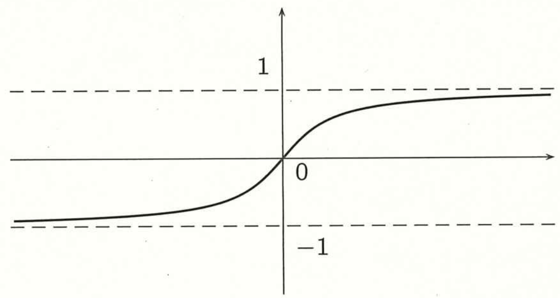
$$r < f(x) < s \ \text{ for all } \ x \in A$$

となる定数 r, s があることである。定義域 A が有界であるか否かには無関係

である。上に有界，下に有界，も同様に定義される。

有界な関数に対しては上限・下限が必ず存在する。

例えばグラフが下のようである関数 f に対しては，無限開区間 $(-\infty, \infty)$ において最大値も最小値も存在しないが，上限が 1 であり，下限は -1 である。



2.4　上極限・下極限

極限という概念は，数列の項が ∞ の方向へ進んだときの状態を調べるのに極めて有効である。しかし，いつも存在するとは限らないという短所がある。

そこで，いつも存在する極限として上極限・下極限というものを考える。

数列 $\{c_n\}$ が与えられたとき，

$$x_n = \sup\{c_n, c_{n+1}, \cdots\}$$

を考える。これは有限であれば，$n = 1, 2, \cdots$ に応じて単調に減少する。よって数列 $\{x_n\}$ は有限の値に収束するか，または $\pm\infty$ に発散するかである。この極限を**上極限**とよび $\limsup$ で表わす。すなわち，

$$\limsup_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (\sup\{c_n, c_{n+1}, \cdots\})$$

である。

下極限も同様に

$$\liminf_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} (\inf\{c_n, c_{n+1}, \cdots\})$$

と定義する。

一般に

$$\liminf_{n\to\infty} c_n \leqq \limsup_{n\to\infty} c_n$$

が常に成立し，数列が収束するための必要十分条件は

$$\liminf_{n\to\infty} c_n = \limsup_{n\to\infty} c_n < \infty$$

となることである。この共通の値が

$$\lim_{n\to\infty} c_n$$

となる。

読者は次を検証してみられるとよい（k は定数)。

$$\limsup_{n\to\infty}(k + c_n) = k + \limsup_{n\to\infty} c_n, \quad \liminf_{n\to\infty}(k + c_n) = k + \liminf_{n\to\infty} c_n$$
$$\liminf_{n\to\infty}(-c_n) = -\limsup_{n\to\infty} c_n$$

関数の極限についても同様の考察をする。

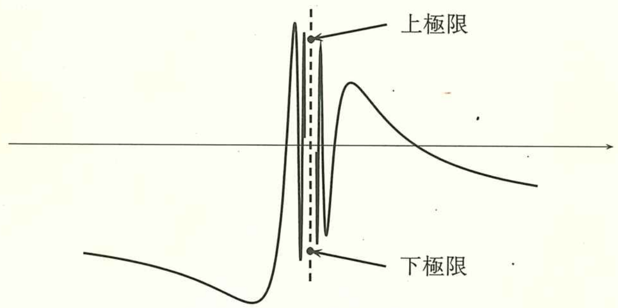
すなわち，$x = c$ の周辺で

$$\left\{f(x) : |x - c| < \frac{1}{n}\right\}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

の上限・下限を用いて，

$$\limsup_{x\to c} f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\sup\left\{f(x) : |x - c| < \frac{1}{n}\right\}\right)$$
$$\liminf_{x\to c} f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\inf\left\{f(x) : |x - c| < \frac{1}{n}\right\}\right)$$

を定義し，それぞれ $x = c$ における**上極限**・**下極限** とよぶ。



2.5　単調列

本書では，数列 $\{x_n\}$ が単調増加して x に収束するという現象を

$$\{x_n\} \nearrow x$$

と略記することとする。逆向きの矢印

$$\{x_n\} \searrow x$$

は単調減少して収束することである。数列だけでなく集合の列に対しても

$$\{S_n\}_n \nearrow S$$

は

$$S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_n \subset \cdots \quad かつ \quad S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$$

の略記である。関数列について

$$f_1 \leqq f_2 \leqq \cdots \leqq f_n \leqq \cdots$$

であるとは，各 x に対して

$$f_1(x) \leqq f_2(x) \leqq \cdots \leqq f_n(x) \leqq \cdots$$

となることであり，これも

$$\{f_n\}_n \nearrow \quad または \quad \{f_n\} \nearrow$$

と略記する。逆の矢印も同じ。

2.6　無限個を数える

無限個の要素からなる集合を無限集合という。$\mathbb{R}$ がその例であり，この他に自然数の全体

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, , \cdots, 100000, \cdots\}$$

や整数の全体 $\mathbb{Z}$ などがある。

こうした無限集合のうち，その要素に $1, 2, 3, \cdots$ と番号をつけてカウントアッ