解析学Ⅲ	自習確認・課題 No.301	令和　年度
教育学部	教育専攻	番　氏名
	課題評価　／	自己理解評価　／ 5

[出題項目 復習]

[確認事項] ○ △ × で 評価

[ ] **(1)** 「解析学□」と「解析学□」の基本を理解している。

[ ] **(2)** 次の公式を活用できる。

１． x の微分可能な関数 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ に対し，次の微分公式が成り立つ。

(1) $\dfrac{d}{dx}(\lambda f(x))=\lambda\dfrac{d}{dx}f(x)$　ただし，λ は任意の実数とする。

(2) $\dfrac{d}{dx}(f(x)\pm g(x))=\dfrac{d}{dx}f(x)\pm\dfrac{d}{dx}g(x)$　ただし，複号 $\pm$ は上下同順に読む。

(3) $\dfrac{d}{dx}(f(x)\times g(x))=\dfrac{d}{dx}f(x)\times g(x)+f(x)\times\dfrac{d}{dx}g(x)$

(4) $\dfrac{d}{dx}(f(x)\div g(x))=\dfrac{\frac{d}{dx}f(x)\times g(x)-f(x)\times\frac{d}{dx}g(x)}{(g(x))^2}$

(5) $\dfrac{d}{dx}(f^{-1}(x))=\dfrac{1}{\frac{df}{dy}(f^{-1}(x))}$　ただし，$f(x)$ の逆関数 $y=f^{-1}(x)$ が存在すると仮定する。

(6) $\dfrac{d}{dx}(g(f(x)))=\dfrac{d}{dy}g(y)\times\dfrac{d}{dx}f(x)$

２．積分公式

(1) $\displaystyle\int x^p dx=\frac{1}{p+1}x^{p+1}+C$ ただし，$p\neq -1$ で定数とする。

(2) $\displaystyle\int\frac{1}{x}dx=\log_e|x|+C$　(3) $\displaystyle\int e^{ax}dx=\frac{1}{a}e^{ax}+C$

(4) $\displaystyle\int\sin ax dx=-\frac{1}{a}\cos ax+C$　(5) $\displaystyle\int\cos ax dx=\frac{1}{a}\sin ax+C$

(6) $\displaystyle\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+C$　(7) $\displaystyle\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x+C$

ただし，$\cot x=\frac{1}{\tan x}$ とする。

３． $y=f(x)$ かつ $x=g(t)$ であるとき，

$\displaystyle\int f(x)\ dx=\int f(g(t))g'(t)\ dt$　　$\displaystyle\int f(x)\ dt=\int f(x)(g^{-1})'(x)\ dx$

が成り立つ。

４．二つの関数 $y=f(x)$，$y=g(x)$ に対し， $F'(x)=f(x)$ とすると，

$\displaystyle\int f(x)g(x)\ dx=F(x)g(x)-\int F(x)g'(x)\ dx$

５．

(1) $\displaystyle\int\frac{a}{x^2+a^2}\ dx=\arctan\frac{x}{a}+C$ (C は積分定数) となる。

(2) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}dx=\log_e|x+\sqrt{x^2+A}|+C$　ただし，$A\neq 0$

(3) $\displaystyle\int\sqrt{x^2+A}dx=\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+A}+A\log_e|x+\sqrt{x^2+A}|)+C$　ただし，$A\neq 0$

(4) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+C$

(5) $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2}(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a})+C$

６． $t=\tan\frac{x}{2}$ $(-\pi<x<\pi)$ とおくと，

$dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt$，$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$\tan x=\dfrac{2t}{1-t^2}$ となる。

7． $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\ dx$，$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\ dx$ とおく。ただし，n は負でない整数とする。このとき，$I_n=J_n$ で，$I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ が成り立つ。

したがって，次のことが成り立つ。

(1) n が奇数のときは，$I_n=J_n=\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2}{3}$

(2) n が偶数のときは，$I_n=J_n=\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}$

解析学口　　　自習課題　　　1 時限目

【1 時限目に限らず，すべての問題に対し，途中の式あるいは説明文を書いていること】

問１．次ぎの関数を微分せよ。

(1) $y=e^{-x}\sin x$　**(2)** $y=a^{2x^2}$　**(3)** $y=\log_e|\cos x|$

(4) $y=\arcsin\sqrt{x}$　**(5)** $y=\arctan\dfrac{2x+3}{4}$

(解答) (1)

(2)

(3)

(4)

(5)

問２．次の定積分を (原始関数を用いて) 求めよ。

(1) $\int_{-1}^{0}\cos\dfrac{\pi}{3}x\ dx$　**(2)** $\int_1^e\dfrac{\log_e x}{x}\ dx$　**(3)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\ dx$

(4) $\int_0^{\pi}x\sin x\ dx$　**(5)** $\int_1^2 x\log_e x\ dx$　**(6)** $\int_0^2 xe^{\frac{x}{2}}\ dx$

(7) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin x\cos^3 x - 3\sin x\cos x\ dx$ **(8)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 x}{1+2\cos x}\ dx$ **(9)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x}\ dx$

(解答) (1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

(7)

(8)

(9)

【配付予定テキストより】

問２１０．次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n}$　　**(2)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n-n^3}{n^2+n+1}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-3}+2)$

(解答) (1)

(2)

(3)

問２１１．次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sin^n\frac{28\pi}{5}$　　**(2)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n}{4^n+(-3)^n}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}$

(解答) (1)

(2)

(3)

問２１２．次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$　　**(2)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$

(解答) (1)

(2)

問２１３．次の関数の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ **(2)** $\displaystyle\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{x-2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x^2-2x)$ **(4)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}2^x$ **(6)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}$ **(8)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$

(解答) (1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

(7)

(8)

(9)

解析学Ⅱ　　自習課題　　3 時限目

問２１４．次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{|x|}{x}$　　**(2)** $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{|x|}{x}$

(解答) (1)

(2)

問２１５．関数 $y=f(x)$ が $x=a$ で連続である定義を述べよ。

(解答)

問２１６．中間値の定理を述べよ。

(解答)

問２１７．関数 $y = f(x)$ の $x = a$ における微分係数の定義を述べよ。

(解答)

問２１８．次の各問に答えよ。
(1) 関数 $f(x) = |x|$ は $x = 0$ において微分可能か答えよ。
(2) 関数 $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{e^{-x}}$ の導関数を求めよ。

(解答) (1)

(2)

解析学Ｉ　　　　自習課題　　　　4 時限目

問２１９．次の関数を微分せよ。(14)，(15) はそれぞれ t の式，θ の式で答えてよい。

(1) $y = \dfrac{x+3}{x^2-1}$　　**(2)** $y = (x^2+1)^3(x^3-1)$
(3) $y = x^{\sqrt{2}}$　　**(4)** $y = \dfrac{2}{(2x+1)^4}$
(5) $y = \sqrt{x^2+2x+3}$　　**(6)** $y = \cos(ax+b)$
(7) $y = \cot(2x-1)$　　**(8)** $y = \sec x^2$
(9) $y = \dfrac{\arctan x}{x}$　　**(10)** $y = \arcsin(\sqrt{x})$
(11) $y = \arccos(1-2x)$　　**(12)** $y = \log_e|\sin x|$
(13) $y = 2^{3x}$　　**(14)** $x = t^2$ **かつ** $y = t^3$
(15) $y = a(\theta - \sin\theta)$ **かつ** $x = a(1-\cos\theta)$

(解答) (1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

(7)

(8)

(9)

(10)

(11)

(12)

(13)

(14)

(15)

問２２０．次の関数を x の関数とみて微分せよ。

(1) $f(x)=e^{x^2+t^2}$ **(2)** $f(x)=\arctan\frac{t}{x}$

(解答) (1)

(2)

【以上，配布予定テキストの問題より】

問３． 次ぎの二つの変数 x，y の関数を，x を定数とみて，y について微分せよ。

(1) $f(x,y)=x^y$ **(2)** $f(x,y)=y^x$

(3) $y=e^{-x}\sin y$ **(4)** $y=\log_e y|\cos x|$

(5) $y=x\arcsin\sqrt{y}$ **(6)** $y=\arctan\dfrac{3x+2y}{4}$

(7) $f(x,y)=\arcsin xy$ **(8)** $f(x,y)=\arctan xy$

(9) $f(x,y)=\arccos y^x$

(解答) (1) $f(x,y)=g(y)$ とおくと，$g'(y)=x^y\log_e x$ $x=2$ と思って微分して，2 を x に代える。

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

(7)

(8)

(9)

第７章 第１節 1 変数関数

問２１０.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=0$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n-n^3}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-n}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=-\infty$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-3}+2)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3-(n-3-4\sqrt{n-3}+4)}{\sqrt{n+3}+(\sqrt{n-3}-2)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+4\sqrt{n-3}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-3}-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{\sqrt{n}}+4\sqrt{1-\frac{3}{n}}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1-\frac{3}{n}}-\frac{2}{\sqrt{n}}}=2$$

問２１１.

(1) $\sin\dfrac{28\pi}{5}=\sin\dfrac{8\pi}{5}$ で，$-1<\sin\dfrac{8\pi}{5}<0$ より，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sin^n\frac{28\pi}{5}=\lim_{n\to\infty}(\sin\frac{28\pi}{5})^n=0$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n}{4^n+(-3)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{-2}{4})^n}{1+(\frac{-3}{4})^n}=0$

(3) m を $|a|\leqq m$ を満たす自然数とする。 $2m+1<n$ とすると，

して，$\dfrac{|a|}{n}<\dfrac{|a|}{2m}\leqq\dfrac{1}{2}$ となるので，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|\frac{a^n}{n!}|=\lim_{n\to\infty}\frac{|a|^n}{1\cdot2\cdot3\cdots(2m-1)\cdot2m\cdot(2m+1)\cdots n}$

$A=\dfrac{|a|^{2m-1}}{1\cdot2\cdot3\cdots(2m-1)}$ とおくと，

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{a^n}{n!}|=A\lim_{n\to\infty}\frac{|a|^{n-2m+1}}{2m\cdot(2m+1)\cdots n}\leqq A\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2m+1}=0$$

より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$

問２１２.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}=\lim_{n\to\infty}\left((1+\frac{1}{n})^n\right)^3=e^3$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{x}=\lim_{x\to0}3\times\frac{\sin3x}{3x}=3$

問２１３.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+2)=4$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to2-0}\frac{1}{x-2}=-\infty$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x^2-2x)=\lim_{x\to\infty}x(x-2)=\infty$

(4) $t=-x$ とおくと，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+1}-t)$

$\displaystyle=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2+1}-t)(\sqrt{t^2+1}+t)}{\sqrt{t^2+1}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2+1-t^2}{\sqrt{t^2+1}+t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t}}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}+1}=0$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}2^x=0$

(6) $\lim_{x\to\infty} \log_e(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\log_e(1+x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{(\log_e(1+x))'}{x'}$
$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{1+x} = 0$ より，$\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$
(7) $t = \pi - x$ とおくと，$\lim_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{\pi - x} = \lim_{t\to 0} \dfrac{\sin(\pi - t)}{t}$
$= \lim_{t\to 0} -\dfrac{\sin t}{t} = -1$
(8) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}$
$= \lim_{x\to 0} x \cdot \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{1+\cos x} = 0$
(9) $-1 \leqq \sin x \leqq 1$ より，
$\lim_{x\to\infty} \dfrac{-1}{x} \leqq \lim_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} \leqq \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}$ となる。
$\lim_{x\to\infty} \dfrac{-1}{x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ より，$\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$ である。

問２１４．

(1) $x > 0$ のとき $\dfrac{|x|}{x} = 1$ なので，$\lim_{x\to +0} \dfrac{|x|}{x} = 1$

(2) $x < 0$ のとき $\dfrac{|x|}{x} = -1$ なので，$\lim_{x\to -0} \dfrac{|x|}{x} = -1$

問２１５．

任意の正の実数 ε に対し，$|x-a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ となる正の実数 δ が存在する。(定義２４を参照する。)

【連続 (図形的意味)】

関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で連続であるとき，そのグラフは $x = a$ で途切れていない。

問２１６．

定理４６． [中間値の定理]
f を閉区間 $[a, b]$ において連続な関数とする。$f(a) < c < f(b)$ または $f(b) < c < f(a)$ を満たす任意の実数 c に対し，$f(d) = c$ かつ $a < d < b$ を満たす実数 d が存在する。

【中間値の定理 (図形的意味)】

閉区間 $[a, b]$ において連続な関数 $y = f(x)$ のグラフの両端の高さの $f(a)$ と $f(b)$ の間に x 軸に平行な直線を引くと必ず $y = f(x)$ のグラフと交わる。

問２１７．

$f'(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

問２１８.

(1) 前問の解より,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$

この極限は問１８９．より，一つの値に収束しない。

故に，$x=0$ において $f(x)=|x|$ は微分可能でない。

(2) 導関数は $\dfrac{df(x)}{dx} = e^x \sin 3x + 3e^x \cos 3x = e^x(\sin 3x + 3\cos 3x)$ である。

故に，$x=1$ における微分係数は $f'(1) = e(\sin 3 + 3\cos 3)$ である。

問２１９.

(1) $y' = \dfrac{(x^2-1)-2x(x+3)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-x^2-6x-1}{(x^2-1)^2} = -\dfrac{x^2+6x+1}{(x-1)^2(x+1)^2}$

(2) $y' = 6x(x^2+1)^2(x^3-1) + 3x^2(x^2+1)^3$

$= 3x(x^2+1)^2\{2(x^3-1)+x(x^2+1)\}$

$= 3x(x^2+1)^2(3x^3+x-2)$

(3) $y' = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$

(4) $y' = \dfrac{-16(2x+1)^3}{(2x+1)^8} = -\dfrac{16}{(2x+1)^5}$

(5) $y' = \dfrac{2(x+1)}{2\sqrt{x^2+2x+3}}$

(6) $y' = -a\sin(ax+b)$

(7) $y' = -\dfrac{2}{\sin^2(2x-1)}$

(8) $y' = \dfrac{2x\sin x^2}{\cos^2 x^2}$

(9) $y' = \dfrac{\frac{1}{1+x^2} \times x - 1 \times \arctan x}{x^2} = \dfrac{x-(1+x^2)\arctan x}{x^2(1+x^2)}$

(10) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$

(11) $y' = \dfrac{2}{\sqrt{1-(1-2x)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{1-1+4x-4x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$

(12) $y' = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \cot x$

(13) $y' = 2^{3x} \cdot 3\log_e 2$

(14) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3t^2}{2t} = \dfrac{3t}{2}$

(15) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a - a\cos\theta}{a\sin\theta} = \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

問２２０.

(1) $\dfrac{df(x)}{dx} = 2xe^{x^2+t^2}$

(2) $\dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{1}{1+(\frac{t}{x})^2} \times (-\dfrac{t}{x^2}) = -\dfrac{t}{x^2+t^2}$

問３.

$g(y) = f(x,y)$ として,

(1) $g'(y) = x^y \log_e x$ となる。

(2) $g'(y) = xy^{x-1}$ となる。

(3) $g'(y) = e^{-x}\cos y$

(4) $g'(y) = \log_e |\cos x| + \frac{1}{y}$

(5) $g'(y) = \frac{x}{\sqrt{1-(\sqrt{y})^2}} \times \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{x}{2\sqrt{y-1}}$

(6) $g'(y) = \frac{1}{1+(\frac{3x+2y}{4})^2} \times \frac{1}{2} = \frac{8}{9x^2+12xy+4y^2+16}$

(7) $g'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-(xy)^2}} \times x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}$

(8) $g'(y) = \frac{1}{1+x^2y^2} \times x = \frac{x}{1+x^2y^2}$

(9) $g'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-(y^x)^2}} \times xy^{x-1} = \frac{xy^{x-1}}{\sqrt{1-y^{2x}}}$