解析学III　確認課題 No.302　正解　平成　年度

[出題項目 偏微分と接平面]

問１． 次ぎの 2 変数関数の偏微分 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ。

(1) $z = a^{2x^2+y}$　**(2)** $z = \log_e|\cos(x+y)|$

(3) $z = y\arcsin\sqrt{x}$　**(4)** $z = \arctan\dfrac{2x+3}{4y}$

[正解] (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 4xa^{2x^2+y}\log_e a$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = a^{2x^2+y}\log_e a$

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{\cos(x+y)}(-\sin(x+y)) = -\dfrac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = -\tan(x+y)$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{\cos(x+y)}(-\sin(x+y)) = -\dfrac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = -\tan(x+y)$

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{\sqrt{1-x}} \times \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{y}{2\sqrt{x(1-x)}}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \arcsin\sqrt{x}$

(4) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{1+(\frac{2x+3}{4y})^2} \times \dfrac{1}{2y} = \dfrac{16y^2}{2y(16y^2+(2x+3)^2)} = \dfrac{8y}{4x^2+12x+16y^2+9}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{1+(\frac{2x+3}{4y})^2} \times (-\dfrac{4(2x+3)}{16y^2}) = \dfrac{16y^2 \times 4(2x+3)}{16y^2(16y^2+(2x+3)^2)} = \dfrac{4(2x+3)}{4x^2+12x+16y^2+9}$

問２． 次の関数のグラフの [ ] 内の点で接する接平面の方程式を求めよ。

(1) $f(x,y) = 3x^2+2xy-2y^2$　$[(1,2)]$　**(2)** $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{xy}}$　$[(2,1)]$

[正解] (1) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 6x+2y$ より，$\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 10,$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x-4y$ より，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -6$ となる。

故に，求める接平面の方程式は

$z = 10(x-1)-6(y-2)+(3+4-8)$ より，$10x-6y-z+1=0$ である。

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{1}{2x\sqrt{xy}}$ より，$\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1) = -\dfrac{1}{4\sqrt{2}},$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{1}{2y\sqrt{xy}}$ より，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1) = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ となる。

故に，求める接平面の方程式は

$z = -\dfrac{1}{4\sqrt{2}}(x-2) - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(y-1) + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，

$x+2y+4\sqrt{2}z-8=0$ である。