解析学 IV　　確認課題 No.402 正解　　平成　年度

[出題項目 導関数]

問１． $x=a$ **の近くで定義されている関数** $f(x)$ **が** $x=a$ **で微分可能であれば，** $x=a$ **で連続であることを示せ。**

正解

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ が有限な値として存在するので，

$\displaystyle\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times(x-a)=A\times 0=0$ となり，$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ が成り立つ。故に，$f(x)$ が $x=a$ で微分可能であれば，$x=a$ で連続である。

問２．関数 $f(x)=\begin{cases}0 & (x=0 \text{ のとき}) \\ x^2\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0 \text{ のとき})\end{cases}$ **は** $x=0$ **で微分可能だが，** $f'(x)$ **は** $x=0$ **で連続でないことを示せ。**

正解

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$ となり，$f(x)$ は $x=0$ で微分可能である。

また，$x\neq 0$ のとき，$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\times(x^{-1})'=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ で，

$\displaystyle\lim_{x\to 0}f'(x)$ の極限値は，$\sin\frac{1}{x}$ と $\cos\frac{1}{x}$ がともに振動するので，存在しない。

したがって，$f'(x)$ は $x=0$ で連続でない

問３．導関数の定義にしたがって，関数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ **の導関数を求めよ。**

正解 p9 の 4.1 の (2) の正解をテキストで確認する。

問４．次の関数を微分せよ。

(1) $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{a^2-x^2}}$　　**(2)** $f(x)=\dfrac{2x+5}{\sqrt{3x-4}}$

正解 (1) は p9 の 4.2 の (3)，(2) は p9 の 4.2 の (4) のそれぞれの正解をテキストで確認する。

問５．楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ **上の点** (x_1,y_1) **における接線の方程式を求めよ。**

正解 p9 の 4.4 の正解をテキストで確認する。