解析学 IV　　確認課題 No.401　正解　　平成　年度

[出題項目 数の性質，関数の極限]

問１．$(1+r+r^2+r^3+\cdots+r^{n-1})(1-r)=1-r^n$ を数学的帰納法で証明せよ。したがって，$r \neq 1$ のとき，$1+r+r^2+r^3+\cdots+r^{n-1}=\dfrac{1-r^n}{1-r}$ となる。

正解 $(1+r+r^2+r^3+\cdots+r^{n-1}+r^n)(1-r)$
$=(1+r+r^2+r^3+\cdots+r^{n-1})(1-r)+r^n(1-r)$ と変形し，n の場合の数学的帰納法の仮定を用いて，$n+1$ の場合を証明する。

問２．E を空でない上に有界な $\mathbf{R}$ の部分集合とする。このとき，
$sup\{k\times x|x\in E\}=k\times supE \ \ (k>0)$
となることを証明せよ。

正解 $\lambda=supE$ とおく。先ず，$k\times\lambda$ が集合 $A=\{k\times x|x\in E\}$ の上界であることを示す。$y\in A$ を任意の要素とすると，ある $x\in E$ に対し，$y=kx$ となる。$\lambda=supE$ なので，$x\leqq\lambda$ となり，$k>0$ なので，$y=kx\leqq k\lambda$ となる。故に，$k\lambda$ は集合 A の上界である。

次に，α を A の任意の上界として，$k\lambda\leqq\alpha$ を示し，$k\lambda$ が集合 A の最小上界，つまり，$ksupE=k\lambda=supA$ を証明する。

α は A の上界なので，任意の $x\in E$ に対し，$kx\leqq\alpha$ となる。故に，$k>0$ より，$x\leqq\dfrac{\alpha}{k}$ となり，$\dfrac{\alpha}{k}$ は E の上界である。したがって，$\lambda=supE\leqq\dfrac{\alpha}{k}$ が成り立ち，$k\lambda\leqq\alpha$ が示される。これより，$k\lambda$ は集合 A の最小上界，つまり，$k\times supE=k\times\lambda=supA$ が成り立つ。

問３．次ぎの極限値を求めよ。
(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}$　　**(2)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+4}+x)$

正解 (1) は p4 の 1.1 の (3)，(2) は p4 の 1.1 の (7) のそれぞれの正解をテキストで確認する。

問４．次ぎの関数の連続性について調べよ。
$f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x}{1+x^n}$

正解 p5 の 2.1 の (2) の正解をテキストで確認する。